



第二章 自动控制系统的数学描述

学习要求

■ 基本内容：

- 概述： 数学模型的基本概念、表达方式，建模方法
- 线性系统输入—输出时间函数描述： 线性系统微分方程的列写，微分方程线性化的基本思想.
- 线性系统输入—输出传递函数描述： 数学基础—拉氏变换，传递函数的概念。典型环节的传递函数。
- 控制系统的方框图及梅逊增益公式： 方框图的概念，方框图的化简，信号流图的基本概念，方框图与信号流图的关系，梅逊增益公式。

教学要求

- ◆ 一般了解数学模型的概念、表达方式，建模的方法。
 - ◆ 能够列写一般物理系统的微分方程。
 - ◆ 熟悉拉氏变换的定义、性质，记住常见的简单时间函数的拉氏变换式，能根据拉氏变换的性质求解较复杂时间函数的拉氏变换式，会求拉氏反变换。
 - ◆ 掌握传递函数的概念及典型环节的传递函数。
- 重点掌握控制系统的方框图及方框图的化简方法。
- 重点掌握用梅逊公式求取系统传递函数。

第一节 概论

✧ 控制系统数学模型

定义：揭示系统各变量内在联系的数学表达式和关系图表

包括静态特性模型和动态特性模型

方式： 图表，表达式

图： 方框图；
信号流图；

表达式： 微分方程（或差分方程）；
传递函数；
频率特性函数；

建立方法：

- ✧ 分析法： 据物理化学规律推导
- ✧ 实验法： 据实验数据拟合



第二节 机理分析建模方法

- ✧ 2.2.1 建立模型的方法
- ✧ 2.2.2 建立模型举例
 - ✧ 2.2.2.1 机械系统
 - ✧ 2.2.2.2 电气系统
 - ✧ 2.2.2.3 液力系统
 - ✧ 2.2.2.4 热力系统
- ✧ 2.2.3 物理系统的相似性

2.2.1 建立模型的步骤

假设系统是线性的

- 1.划分系统元件，确定元件输入量、输出量；
- 2.根据元件遵循定律列写动态方程式（为使问题简化可忽略次要因素）
- 3.消除中间变量，推导只保留元件的输入输出的数学关系式
- 4.整理，动态方程标准化：把与输入变量有关的放在等式右边，与输出变量有关的放在等式左边，按降幂。

2.2.2.1 建模举例---机械系统

1). 弹簧--质量--阻尼系统

已知: 弹簧系数 K , 质量 M , 外力 $F(t)$, 阻尼系数 f .

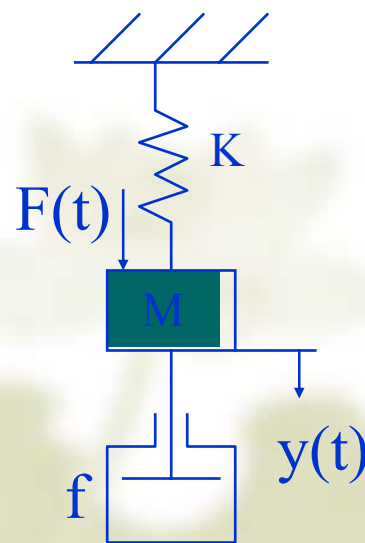
求: 系统动态方程式.

解: 根据牛顿第二定律

$$F(t) - f \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

整理成规范形式

$$\left(\frac{M}{K} \right) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{f}{K} \right) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \left(\frac{1}{K} \right) F(t)$$



2). 弹簧--阻尼系统

已知: 弹簧系数 K , 外力 x , 阻尼系数 f , 位移 y .

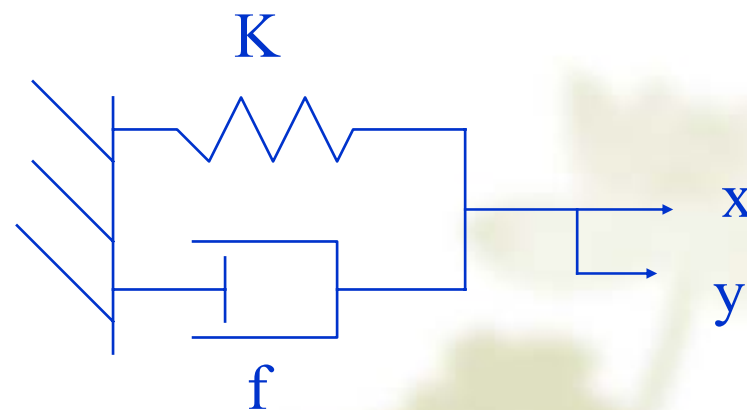
求: 系统动态方程式.

解: 根据牛顿第三定律

$$f \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

整理成规范形式

$$\left(\frac{f}{K} \right) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \left(\frac{1}{K} \right) x(t)$$



3). 无固定的弹簧--阻尼--质量系统

已知: 弹簧系数 K , 位移 x , 阻尼系数 f , 位移 y , 质量 M .

求: 系统动态方程式.

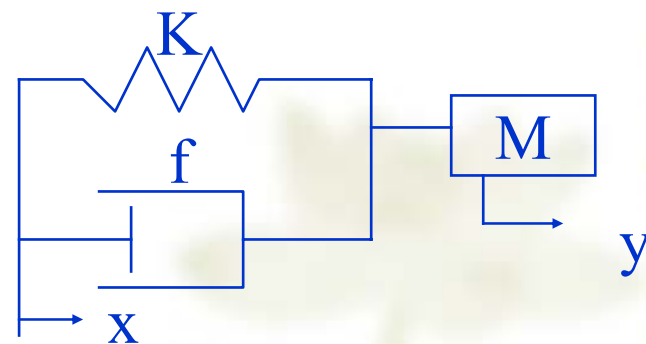
解:

根据牛顿第二定律

$$-f \frac{d(y-x)}{dt} - K(y-x) = M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

整理成规范形式

$$\left(\frac{M}{K}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{f}{K}\right) \frac{dy}{dt} + y = \left(\frac{f}{K}\right) \frac{dx}{dt} + x$$



4). 机械转动系统

已知: 转动惯量 J , 转矩 T , 摩擦系数 f , 转角 θ .

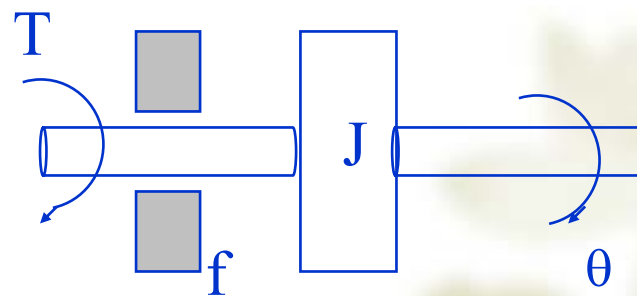
求: 系统动态方程式.

解:

根据牛顿第二定律

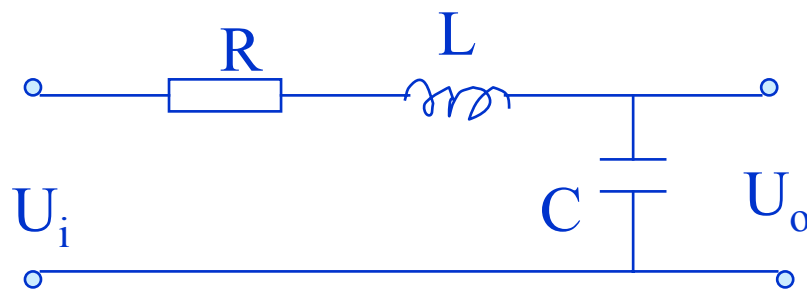
$$J\omega = \sum T$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T$$



2.2.2.2 建模举例---电气系统

1). RLC 电路



已知: RLC 电路如图 .

求: 以 U_i 为输入, U_o 为输出的系统动态方程式.

解: 根据基尔霍夫定律列写方程

$$U_i = U_R + U_L + U_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

消去中间变量,

$$i = C \frac{dU_0}{dt}$$

把用二阶微分方程表示的系统称为二阶系统

整理:

$$LC \frac{d^2 U_0(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_0(t)}{dt} + U_0(t) = U_i(t)$$

2). RC 串并联电路

已知: RC 电路如图 .

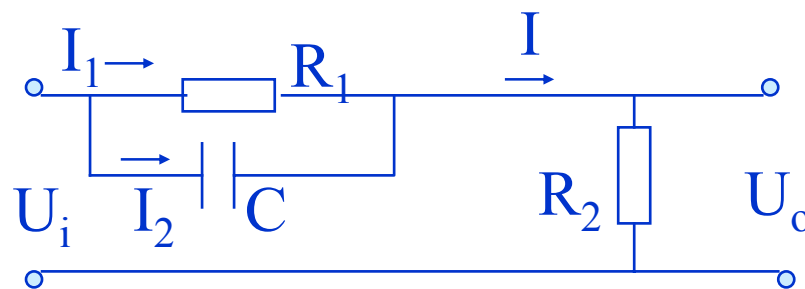
求: 以 U_i 为输入, U_o 为输出的系统动态方程式.

解:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ U_i = I_1 R_1 + IR_2 \\ U_o = IR_2 \\ I_1 R_1 = \frac{1}{C} \int I_2 dt \end{cases}$$

应消去中间变量 I, I_1, I_2

$$U_i = \frac{1}{C} \int I_2 dt + U_o$$



2). RC 串并联电路(续)

$$I_2 = C \left(\frac{dU_i}{dt} - \frac{dU_0}{dt} \right)$$

$$I = \frac{1}{CR_1} \int I_2 dt + I_2 = \frac{1}{R_1} (U_i - U_0) + C \left(\frac{dU_i}{dt} - \frac{dU_0}{dt} \right)$$

$$U_0 = IR_2 = \frac{R_2}{R_1} (U_i - U_0) + R_2 C \left(\frac{dU_i}{dt} - \frac{dU_0}{dt} \right)$$

$$R_2 C \cdot \frac{dU_0}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U_0 = R_2 C \cdot \frac{dU_i}{dt} + \frac{R_2}{R_1} \cdot U_i$$

$$R_1 R_2 C \cdot \frac{dU_0}{dt} + (R_1 + R_2) U_0 = R_1 R_2 C \cdot \frac{dU_i}{dt} + R_2 U_i$$

2.2.2.3 建模举例---液力系统

1). 单容水箱

已知: 流入量 Q_i , 流出量 Q_o , 截面 A ; 液位 H

求: 以 Q_i 为输入, H 为输出的系统动态方程式.

解: 根据物质守恒定律 $\frac{dH}{dt} = \frac{(Q_i - Q_o)}{A}$
 $AdH = (Q_i - Q_o)dt$ 或 $\frac{dH}{dt} = \frac{(Q_i - Q_o)}{A}$

中间变量为 Q_o , 据流量公式

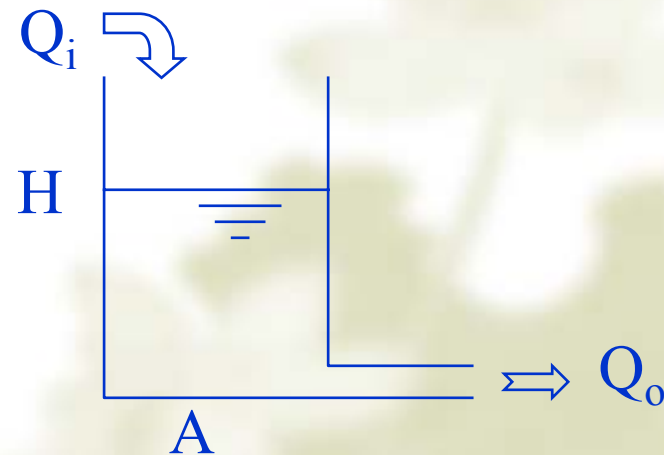
$$Q_o = \alpha\sqrt{H}$$

线性化处理: $Q_o = \alpha'H$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A}(Q_i - \alpha'H)$$

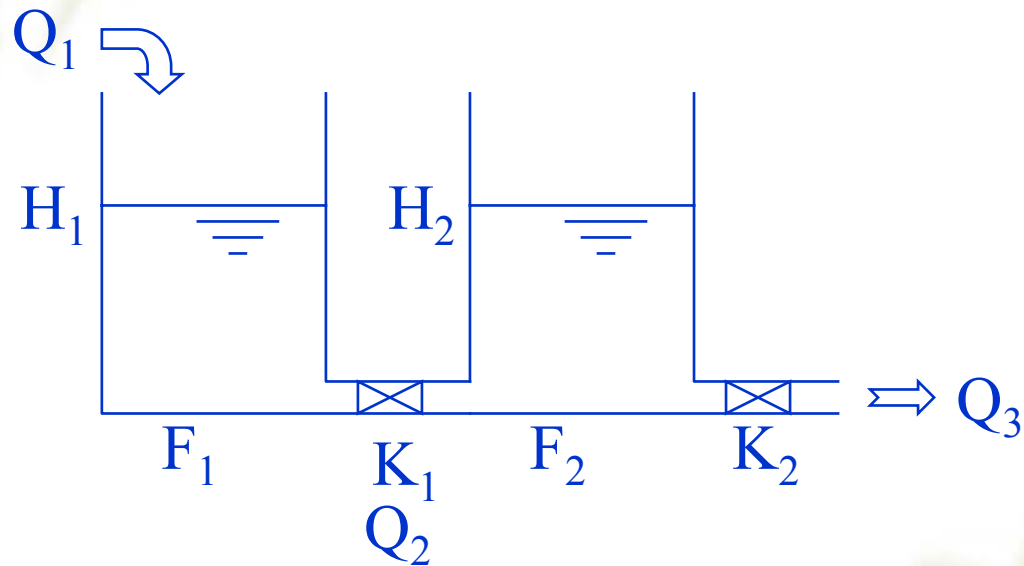
$$\text{或 } \frac{dH}{dt} + \left(\frac{\alpha'}{A}\right)H = \frac{Q_i}{A}$$

$$\text{规范化 } \left(\frac{A}{\alpha'}\right)\frac{dH}{dt} + H = \left(\frac{1}{\alpha'}\right)Q_i$$



2). 双容水箱

已知: 流量 Q_1, Q_2, Q_3 ; 截面 F_1, F_2 ; 液位 H_1, H_2 ; 液阻 K_1, K_2



求: 以 Q_1 为输入, H_2 为输出的系统动态方程式.

2). 双容水箱(续1)

解: 根据物质守恒定律 和流量近似公式

$$\frac{dH_1}{dt} = \left(\frac{1}{F_1} \right) (Q_1 - Q_2) \quad (1)$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \left(\frac{1}{F_2} \right) (Q_2 - Q_3) \quad (2)$$

$$Q_2 = K_1 (H_1 - H_2) \quad (3)$$

$$Q_3 = K_2 H_2 \quad (4)$$

中间变量为 Q_2, Q_3, H_1 , 由(2),(4)

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{F_2} (Q_2 - K_2 H_2) \quad (5)$$

或 $F_2 \cdot \frac{dH_2}{dt} + K_2 H_2 = Q_2$

2). 双容水箱(续2)

由(1) (5) 得
$$\frac{dH_1}{dt} = \left(\frac{1}{F_1} \right) \left(Q_1 - F_2 \cdot \frac{dH_2}{dt} - K_2 H_2 \right)$$

$$H_1 = \left(\frac{1}{F_1} \right) \left(\int Q_1 dt - F_2 H_2 - \int K_2 H_2 dt \right) \quad (6)$$

由(3), (5), (6)

$$F_2 \frac{dH_2}{dt} + K_2 H_2 = K_1 \left(\frac{1}{F_1} \left(\int Q_1 dt - F_2 H_2 - K_2 \int H_2 dt \right) - H_2 \right)$$

$$F_2 \cdot \frac{dH_2}{dt} + K_2 H_2 + K_1 H_2 + \frac{K_1 K_2}{F_1} \cdot \int H_2 dt + \frac{K_1 F_2}{F_1} \cdot H_2$$

$$= \frac{K_1}{F_1} \cdot \int Q_1 dt$$

2). 双容水箱(续3)

$$\begin{aligned} F_1 F_2 \cdot \frac{dH_2}{dt} + (F_1(K_1 + K_2) + K_1 F_2)H_2 + K_1 K_2 \int H_2 dt \\ = K_1 \int Q_1 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 F_2 \cdot \frac{d^2 H_2}{dt^2} + (F_1(K_1 + K_2) + K_1 F_2) \frac{dH_2}{dt} + K_1 K_2 H_2 \\ = K_1 Q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{F_1 F_2}{K_1 K_2} \cdot \frac{d^2 H_2}{dt^2} + \left(F_1 \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) + \frac{F_2}{K_2} \right) \frac{dH_2}{dt} + H_2 \\ = \frac{Q_1}{K_2} \end{aligned}$$

2.2.2.4 建模举例---热力系统

1). 绝热加热过程

已知: 进热量 Q_i , 出热量 Q_o , 工质流量 G , 温度 θ ,
比热 C_p , 器内质量 M

求: 以 Q_i 为输入 θ 为输出的系统动态方程式.

解: 根据能量守恒定律

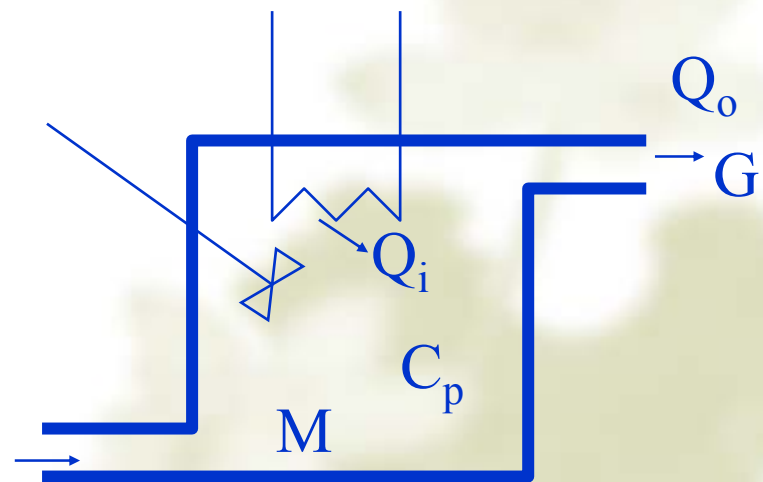
$$MC_p \cdot \frac{d\theta}{dt} = Q_i - Q_o$$

中间变量为 Q_o ,

$$Q_o = GC_p \theta$$

$$MC_p \cdot \frac{d\theta}{dt} + GC_p \theta = Q_i$$

$$\therefore M \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{1}{GC_p} \cdot Q_i$$



2). 加热装置

已知: 进热量 h_i , 工质流量 q , 进口温度 θ_i , 出口温度 θ_o , 环境温度 θ_c , 热容 C , 进口工质比热 C_p , 热阻 R

求: 绝热时和不加热时的系统动态方程式.

解: 根据能量守恒定律

$$h_i + qC_p(\theta_i - \theta_o) - \frac{\theta_o - \theta_c}{R} = C \frac{d\theta_o}{dt}$$

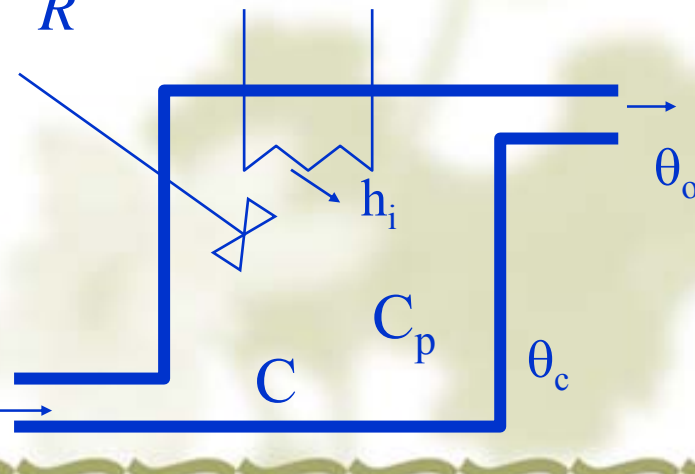
$$C \cdot \frac{d\theta_o}{dt} + \left(qC_p + \frac{1}{R} \right) \theta_o = h_i + qC_p\theta_i - \frac{\theta_c}{R}$$

绝热时

$$C \cdot \frac{d\theta_o}{dt} + qC_p\theta_o = h_i + qC_p\theta_i$$

绝热且不加热时

$$C \cdot \frac{d\theta_o}{dt} + qC_p\theta_o = qC_p\theta_i$$



2.2.3 物理系统的相似性

- ✧ 不同物理性质元件组成，可以有相同的数学模型，即，数学模型已摆脱了物理原型，可以反映出这些系统的共同运动规律。
- ✧ N阶系统的通式：

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} \dot{r} + b_m r \end{aligned}$$

第三节 拉氏变换与传递函数

♣ 2.3.1 拉普拉斯(Laplace)变换

♣ 2.3.1.1 定义

♣ 2.3.1.2 典型函数的拉氏变换

♣ 2.3.1.3 拉氏变换的性质与定理

♣ 2.3.1.4 用拉氏变换法求解微分方程

♣ 2.3.2 传递函数

♣ 2.3.2.1 定义

♣ 2.3.2.2 传递函数的求取方法

♣ 2.3.2.3 传递函数的性质

2.3.1 拉普拉斯(Laplace)变换

♣ 2.3.1.1 定义

♣ 拉氏变换的定义

$$L[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

其中 $x(t)$ ---原函数, $X(s)$ ---象函数,

复变量 $s = \sigma + j\omega$

♣ 拉氏反变换的定义

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

2.3.1.2 典型函数的拉氏变换

- ♣ 1) 单位阶跃函数的拉氏变换

$$x(t) = u(t) = 0(t < 0) \quad \text{或} \quad 1(t \geq 0)$$

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}$$

- ♣ 2) 单位斜坡函数的拉氏变换

$$x(t) = t \cdot u(t)$$

$$L[x(t)] = \frac{1}{s^2}$$

♣ 3) 指数函数的拉氏变换

$$x(t) = e^{-at} \quad t \geq 0$$

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$$

4) 正弦函数的拉氏变换

$$x(t) = \sin \omega t \quad t \geq 0$$

$$L[x(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

2.3.1.3 拉氏变换的性质与定理

- ♣ 1) 线性定理
- ♣ 2) 微分定理
- ♣ 3) 积分定理
- ♣ 4) 终值定理
- ♣ 5) 初值定理
- ♣ 6) 迟延定理
- ♣ 7) 位移定理
- ♣ 8) 卷积定理

1) 线性定理

设 $X(s) = L[x(t)]$ (下同)

$$L[ax(t)] = aX(s)$$

$$L[x_1(t) \pm x_2(t)] = X_1(s) \pm X_2(s)$$

2) 微分定理

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$L\left[\frac{dx^2(t)}{dt^2}\right] = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

2) 微分定理 (续)

.....

$$L\left[\frac{dx^n(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

$$L\left[\frac{dx^n(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s) \quad \text{各初值为0时}$$

3) 积分定理

$$L\left[\int x(t)dt\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int x(t)dt \Big|_{t=0}$$

3) 积分定理 (续)

$$L\left[\iint x(t)dt^2\right] = \frac{X(s)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \int x(t)dt \Big|_{t=0} + \frac{1}{s} \iint x(t)dt^2 \Big|_{t=0}$$

$$L\left[\int \cdots \int x(t)dt^n\right] = \frac{X(s)}{s^n} + \frac{1}{s^n} \int x(t)dt \Big|_{t=0} + \cdots + \frac{1}{s} \underbrace{\int \cdots \int}_n$$

$$+ \frac{1}{s} \underbrace{\int \cdots \int}_n x(t)dt^n \Big|_{t=0}$$

$$L\left[\underbrace{\int \cdots \int}_n x(t)dt^n\right] = \frac{X(s)}{s^n}$$

各初值为0时

4) 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

5) 初值定理

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

6) 迟延定理(实平移定理)

$$L[x(t - \tau)] = e^{-\tau s} X(s)$$

7) 位移定理 (复平移定理)

$$L[e^{-at}x(t)] = X(s+a)$$

8) 卷积定理

$$\begin{aligned} L[g(t) * x(t)] &= L\left[\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau\right] \\ &= L\left[\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] \\ &= G(s)X(s) \end{aligned}$$

2.3.1.4 用拉氏变换法求解微分方程

❖ 1) 求解步骤

- ♣ 对微分方程进行拉氏变换
- ♣ 求系统输出变量表达式
- ♣ 将输出变量表达式展开为部分分式
- ♣ 查表求各分式的拉氏反变换
- ♣ 整理出方程解

❖ 2) 部分分式展开法

- ♣ 通分法（适用于简单函数）

例：

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}$$

$$A(s+b) + B(s+a) = (A+B)s + Ab + Ba = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ab+Ba=1 \end{cases} \Rightarrow A=-B \Rightarrow -Bb+Ba=1$$

$$A = -\frac{1}{a-b} \quad B = \frac{1}{a-b} \quad \therefore \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{\left(\frac{1}{b-a}\right)}{s+a} - \frac{\left(\frac{1}{b-a}\right)}{s+b}$$

♣ 留数法（适用于复杂函数）

$$\text{设 } F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \quad \begin{array}{l} \text{零点: } \{-z_i, i=1,2,\cdots,m\} \\ \text{极点: } \{-p_i, i=1,2,\cdots,n\} \end{array}$$

♣ (1) 当F(s)只有相异实极点时

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

根据复变函数留数定理

$$a_k = \operatorname{Res}[F(s), p_k] = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s+p_k)F(s) \quad k=1,2,\cdots,n$$

例：求 $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ 的部分分式
解：

$$F(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

$$a_1 = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \cdot (s+1) \right|_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \cdot (s+2) \right|_{s=-2} = -1$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

(2) 当 $F(s)$ 含有共轭复极点时, $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

$$F(s) = \frac{a_1 s + a_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

$$(a_1s + a_2)\Big|_{s=-p_1} = F(s)(s + p_1)(s + p_2)\Big|_{s=-p_1}$$

根据上述方程，令实部=实部，虚部=虚部，可解出 a_1 ， a_2

例：求 $F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$ 的部分分式

解：

$$F(s) = \frac{a_1s + a_2}{s^2 + s + 1} + \frac{a_3}{s}$$

$$s^2 + s + 1 = (s + 0.5 + j0.866)(s - 0.5 - j0.866)$$

$$(a_1s + a_2)\Big|_{s=-0.5-j0.866} = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} \cdot (s^2+s+1)\Big|_{s=-0.5-j0.866}$$

$$[a_1(-0.5 - j0.866) + a_2](-0.5 - j0.866) = 0.5 - j0.866$$

$$(0.25 - 0.866^2 + j0.866)a_1 - (0.5 + j0.866)a_2 = 0.5 - j0.866$$

$$\text{虚部=虚部: } 0.866(a_1 - a_2) = -0.866$$

$$\text{实部=实部: } (0.25 - 0.866^2)a_1 - 0.5a_2 = 0.5$$

化简: $a_1 - a_2 = -1$ $a_1 + a_2 = -1$

求解得: $a_1 = -1$ $a_2 = 0$

$$a_3 = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} \cdot s \Big|_{s=0} = 1 \quad \therefore F(s) = -\frac{s}{s^2+s+1} + \frac{1}{s}$$

(3) 当 $F(s)$ 含有重极点时, 设 $p_1 \dots p_r$ 为重极点

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+p_1)^r} + \frac{a_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{a_r}{s+p_1} + \dots$$

$$a_1 = F(s)(s+p_1)^r \Big|_{s=-p_1}$$

$$a_2 = \frac{d[F(s)(s+p_1)^r]}{ds} \Big|_{s=-p_1}$$

...

$$a_r = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}[F(s)(s+p_1)^r]}{ds^{r-1}} \Big|_{s=-p_1}$$

例：求 $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$ 的部分分式

解：

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+1)^3} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{(s+1)}$$

$$a_1 = F(s)(s+1)^3 \Big|_{s=-1} = (s^2 + 2s + 3) \Big|_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \frac{d(F(s)(s+1)^3)}{ds} \Big|_{s=-1} = (2s + 2) \Big|_{s=-1} = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \frac{d^2(F(s)(s+1)^3)}{ds^2} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\therefore F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1}$$

3) 求解微分方程举例

已知: $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 2, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2$ 求: $y(t)$

解: 对微分方程进行拉氏变换

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = \frac{2}{s} + s + 7$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{s^2 + 7s + 2}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\text{令 } Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \left. \frac{s^2 + 7s + 2}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = \left. \frac{s^2 + 7s + 2}{s(s+3)} \right|_{s=-2} = 4$$

$$C = \left. \frac{s^2 + 7s + 2}{s(s+2)} \right|_{s=-3} = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{1}{3s} + \frac{4}{s+2} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{3} + 4e^{-2t} - 0.33e^{-3t}$$

2.3.2 传递函数

2.3.2.1 定义

文字定义：零初始条件下系统输出信号的拉氏变换与输入信号的拉氏变换之比

数学式定义：设输入为 $r(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，则系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$



2.3.2.2 传递函数的求取方法

- 1) 对微分方程进行拉氏变换(零初始条件)
- 2) 对脉冲响应进行拉氏变换
- 3) 实验建模方法 (详见2.5 节)

2.3.2.2 传递函数的求取方法

✿ 1) 对微分方程进行拉氏变换(零初始条件)

系统微分方程:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} \dot{r} + b_m r \end{aligned}$$

零初始条件拉氏变换:

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) \\ = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) R(s) \end{aligned}$$

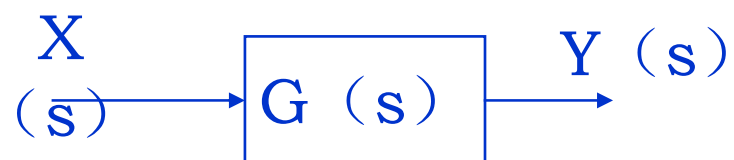
整理得传递函数:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \end{aligned}$$

规范形式: $A(s)$ 为首一多项式, $a_0 = 1$

2.3.2.2 传递函数的求取方法

2) 对脉冲响应进行拉氏变换



取输入 $x(t) = \delta(t)$

则有 $X(s) = 1$

所以输出 $Y(s) = G(s) X(s) = G(s)$

这样有传递函数求取公式：

当 $x(t) = \delta(t)$, $G(s) = L[y(t)]$

2.3.2.3 传递函数的性质

- 1) 传递函数的系数和阶数均为实数，只与系统内部结构参数有关，而与输入量初始条件等外部因素无关
- 2) 实际系统的传递函数是 S 的有理分式， $n \geq m$ （因为系统或元件具有的惯性以及能源有限的缘故）
- 3) 传递函数是物理系统的数学模型，但不能反映物理系统的性质，不同的物理系统可有相同的传递函数
- 4) 单位脉冲响应是传递函数的拉氏反变换
- 5) 传递函数只适用于线性定常系统

第四节 典型环节的动态特性

- ❖ 按照传函的表示形式定义的描述元件运动特性的基本单元称为典型环节

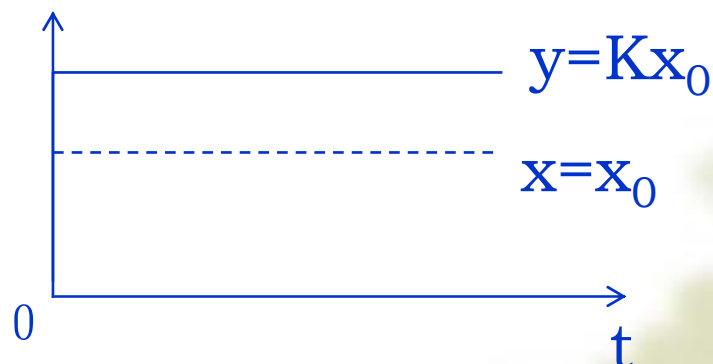
2.4.1 比例环节

动态方程: $y(t) = K x(t)$

传递函数: $G(s) = K$

方框图: 

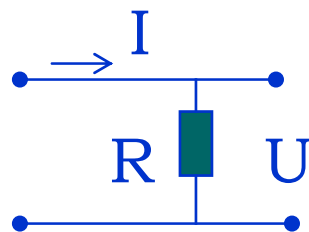
阶跃响应:



特点:

输入与输出成比例

实例:



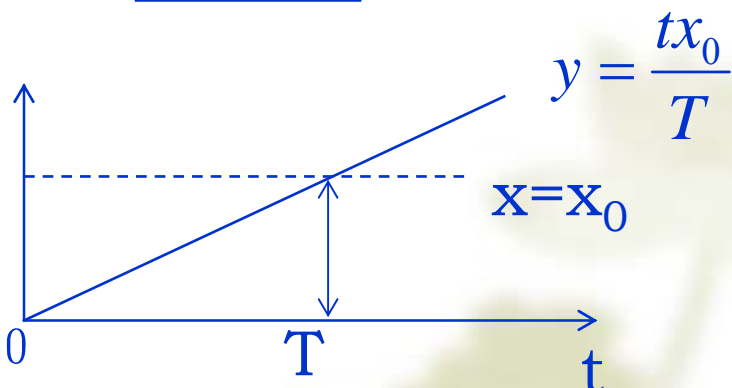
电阻, 或者放大器等

2.4.2 积分环节

动态方程: $y(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^t x(t) dt$

传递函数: $G(s) = \frac{1}{Ts}$

方框图: $X(t) \longrightarrow \boxed{1/(Ts)} \longrightarrow y(t)$

阶跃响应: 

特点:

T大则积分慢

实例:



2.4.3 微分环节

动态方程:

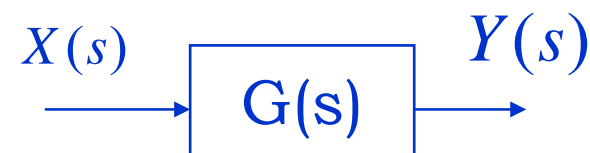
$$y(t) = T_d \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{理想})$$

$$T_d \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_d T_d \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{实际})$$

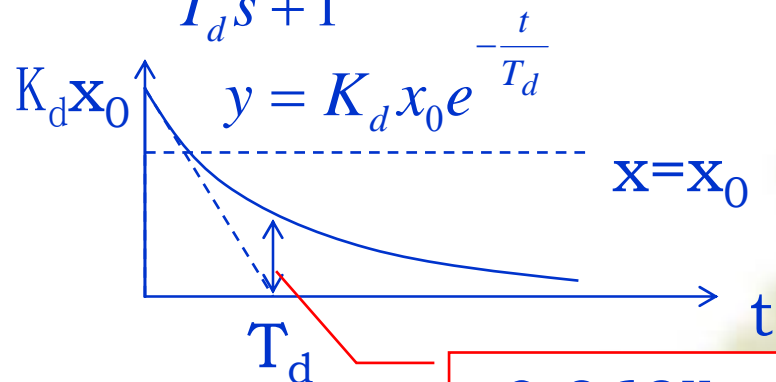
传递函数:

$$G(s) = T_d s$$

$$G(s) = \frac{K_d T_d s}{T_d s + 1}$$



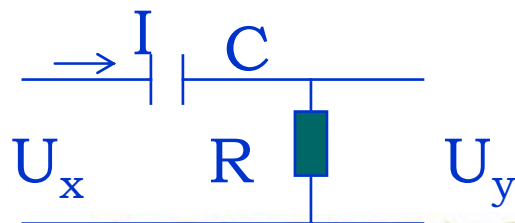
阶跃响应:



特点:

T_d 决定了微分作用时间

实例:

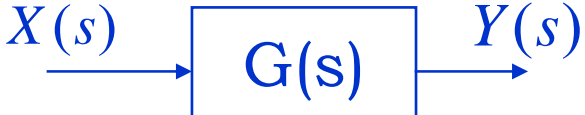


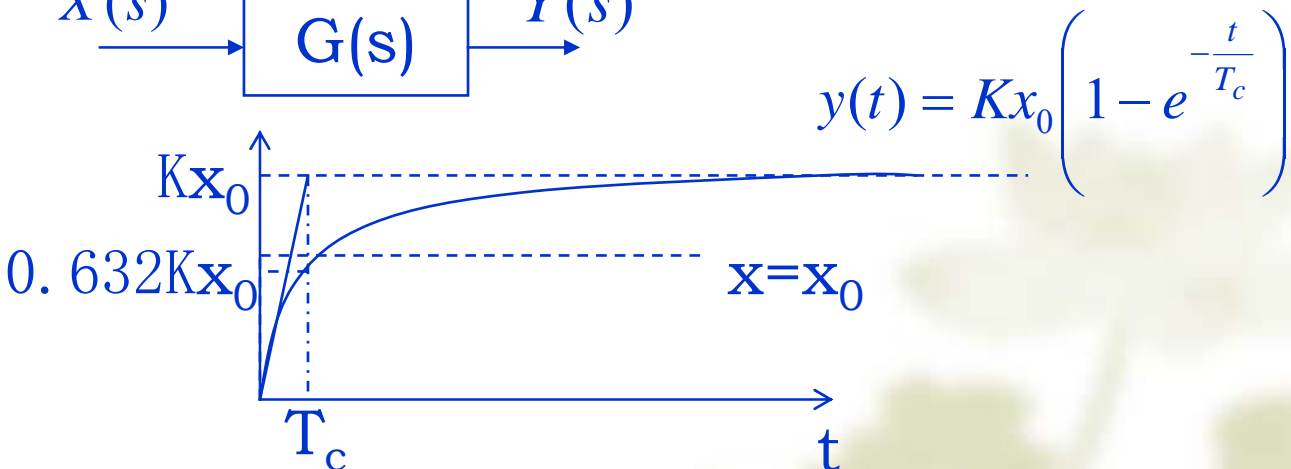
$$RC \cdot \frac{dU_y}{dt} + U_y = RC \cdot \frac{dU_x}{dt}$$

2.4.4 惯性环节

动态方程: $T_c \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$

传递函数: $G(s) = \frac{K}{T_c s + 1}$

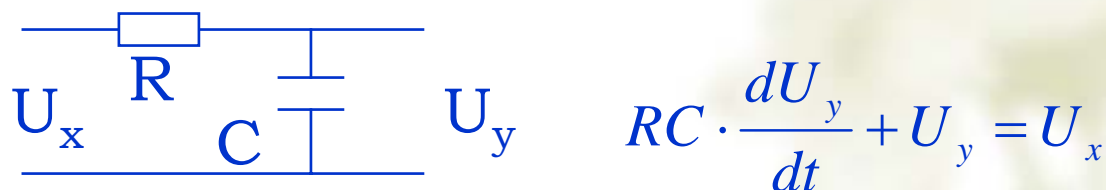
方框图: 

阶跃响应: 

特点:

T_c 决定过渡过程时间, K 决定稳态输出值.

实例:



2.4.5 振荡环节

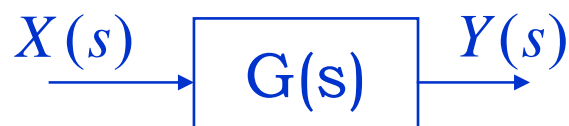
动态方程:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\omega_n \zeta \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

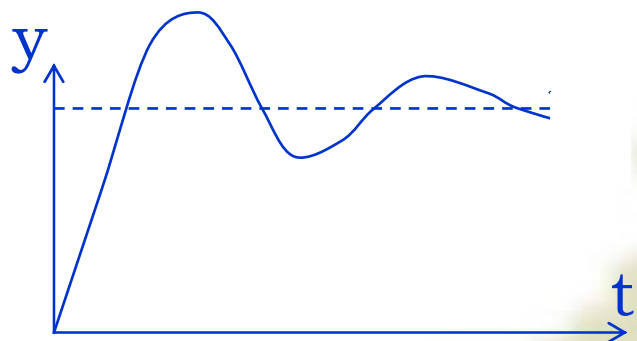
传递函数:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2}$$

方框图:



单位阶跃响应:

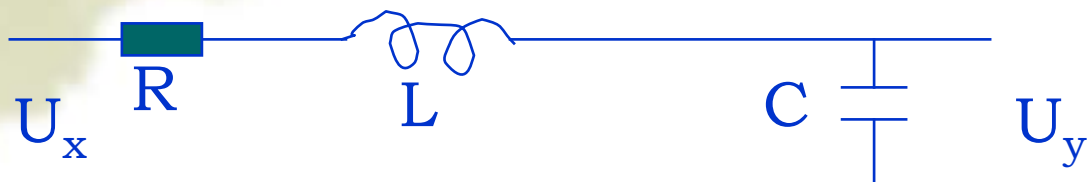


$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad 0 < \zeta < 1$$

特点: ζ 是关键参数, 它决定了振荡特性, ω_n 决定振荡周期.

2.4.5 振荡环节(续)

实例:



$$LC \cdot \frac{d^2 U_y(t)}{dt^2} + RC \cdot \frac{dU_y(t)}{dt} + U_y(t) = U_x(t)$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$T = \sqrt{LC}$$

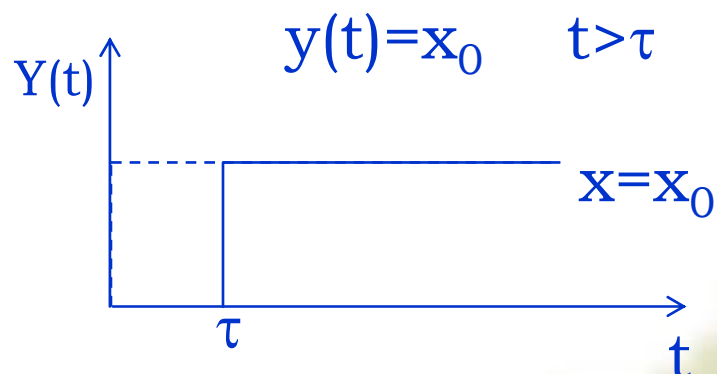
2.4.6 迟延环节

动态方程: $y(t) = x(t - \tau)$

传递函数: $G(s) = e^{-\tau s}$

方框图: $x(s) \longrightarrow \boxed{e^{-\tau s}} \longrightarrow y(s)$

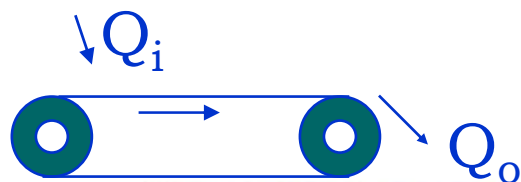
阶跃响应:



特点:

$y(t)$ 比 $x(t)$ 迟延了一段时间 τ .

实例:



$$Q_o(t) = Q_i(t - \tau)$$

[Return](#)

第五节 系统方框图等效变换和信号流图

2.5.1 方框图等效变换

2.5.1.1 基本概念

2.5.1.2 等效变换规则

2.5.1.3 应用举例

2.5.2 信号流图

2.5.2.1 定义

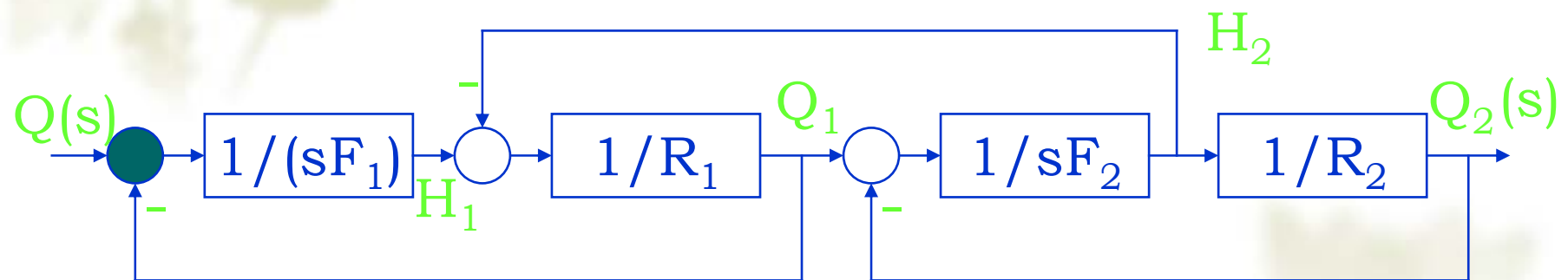
2.5.2.2 性质

2.5.2.3 梅森增益公式

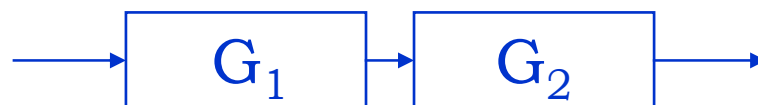
2.5.2.4 应用举例

2.5.1.3

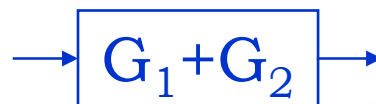
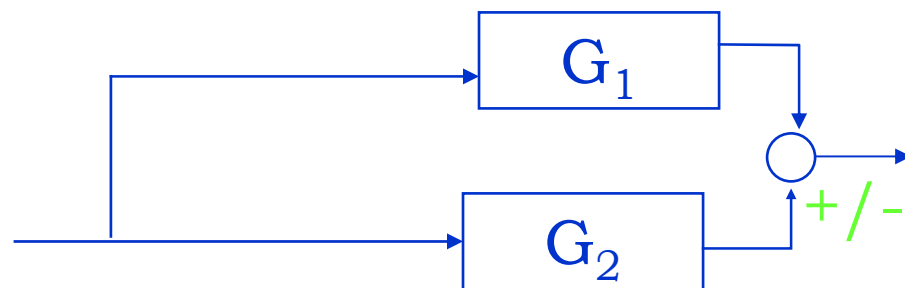
举例



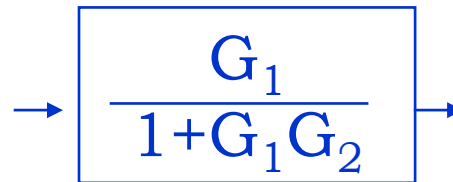
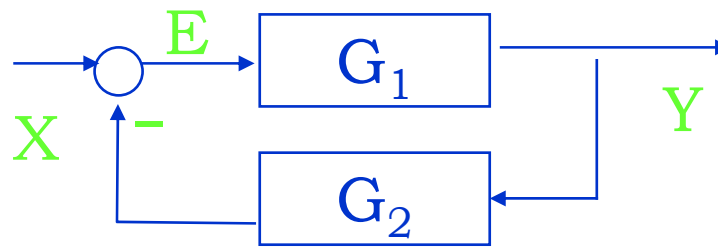
①串联



②并联



③反馈



$$Y = E G_1$$

$$E = X - G_2 Y \quad Y = (X - G_2 Y) G_1$$

$$Y(1 + G_1 G_2) = X G_1$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$



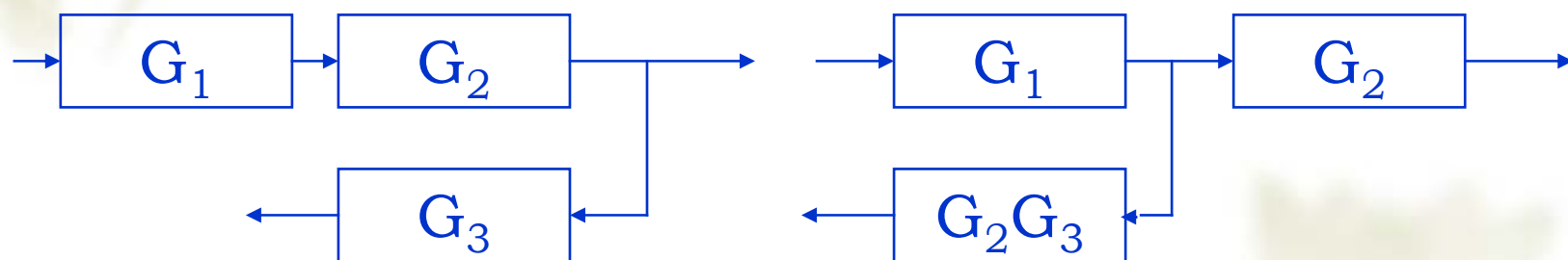
方框图构成要素：

1. 方框
2. 有向线段
3. 分支点
4. 相加点（汇合点）

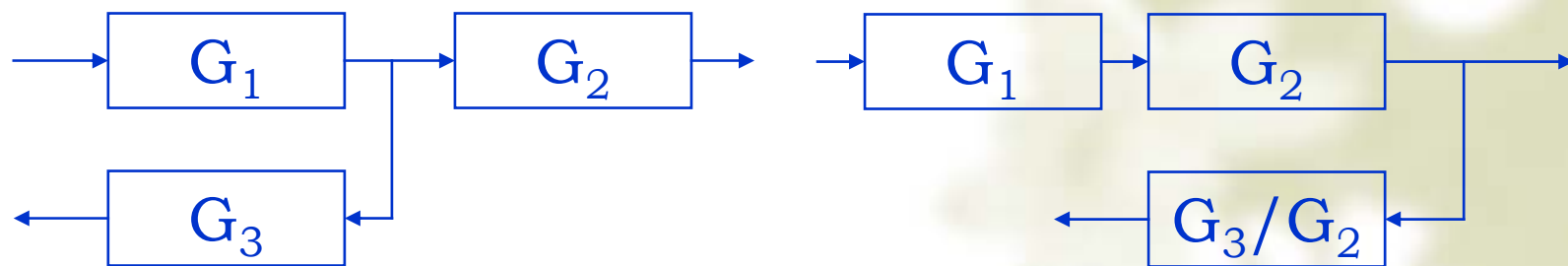
说明

2.5.1.2 分支点等效变换规则

④分支点前移

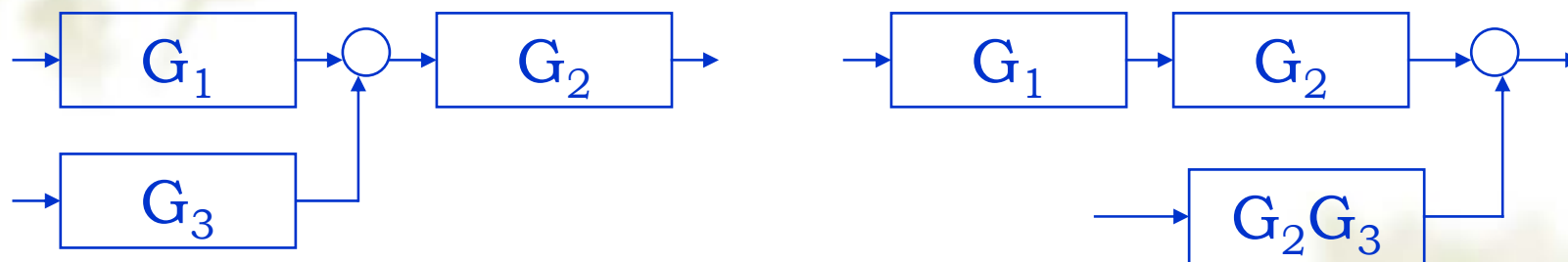


⑤分支点后移

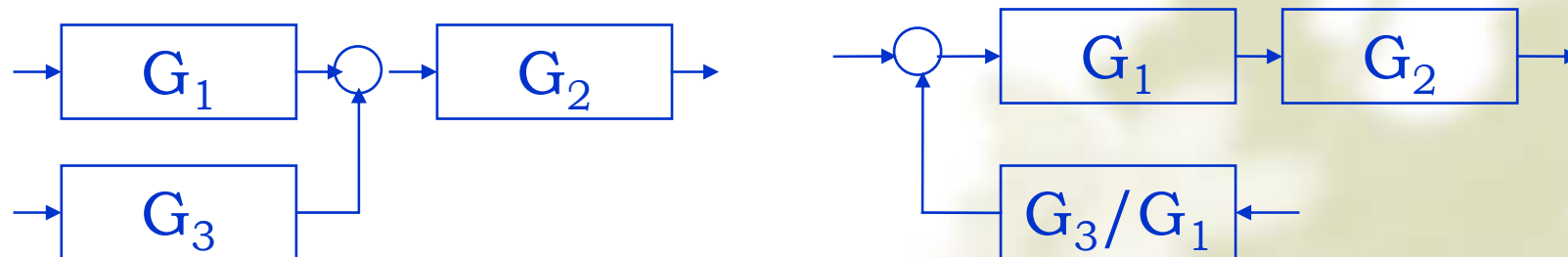


2.5.1.2 相加点等效变换规则

⑥ 相加点后移

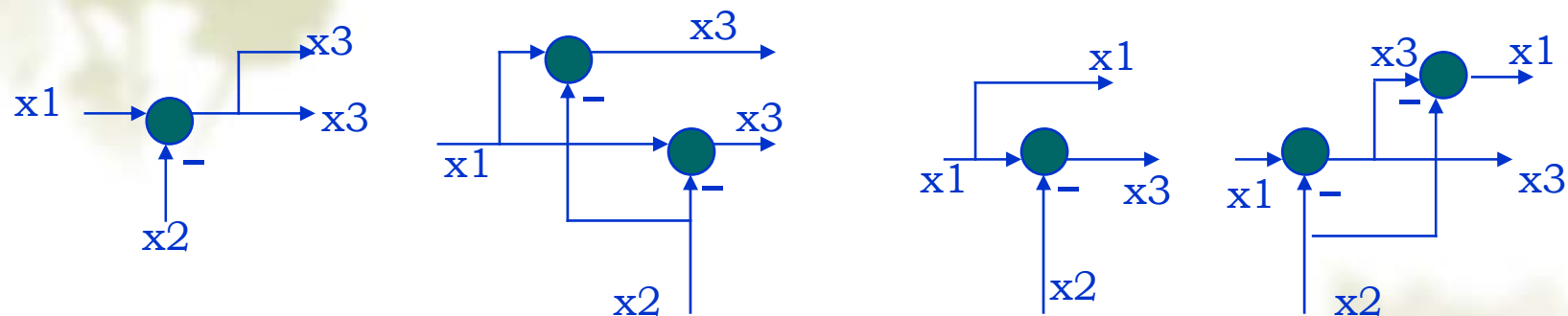


⑦ 相加点前移

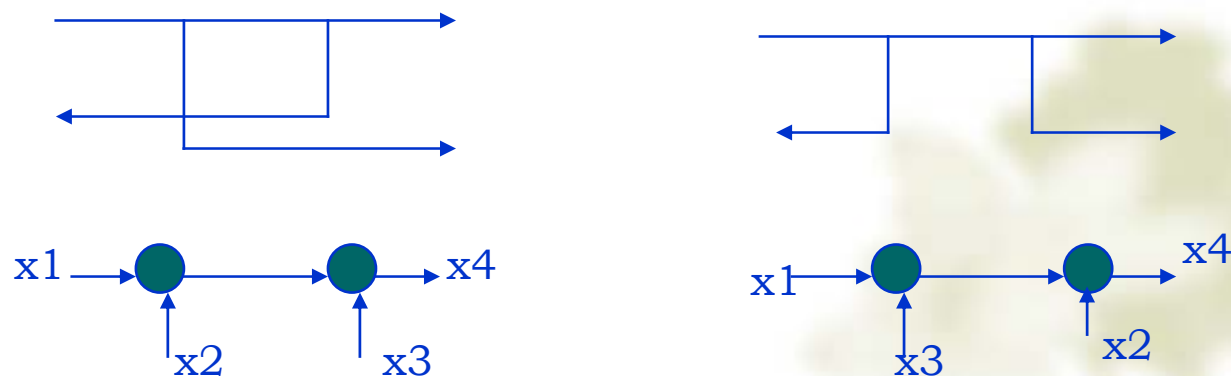


2.5.1.2 等效变换规则

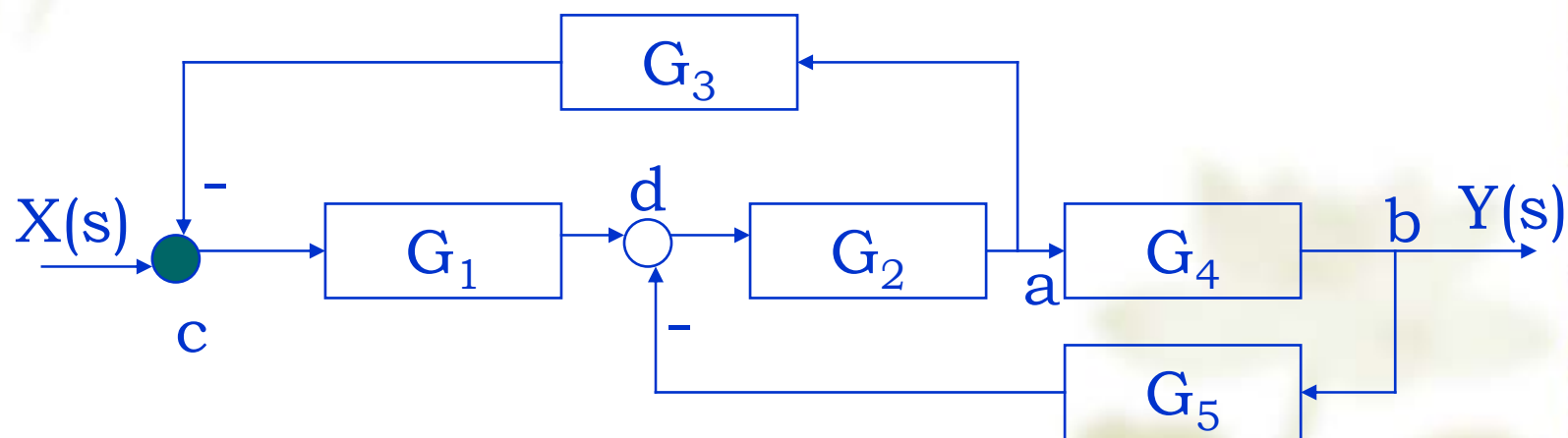
⑧分支点与相加点互移



⑨分支点或相加点间互移



2.5.1.3 应用举例(1)





2.5.2 信号流图

2.5.2.1 定义

信号流图---表示线性代数方程中变量间关系的图示方法.

信号流图要素:

节点-----表示变量或汇合点的, 圆圈

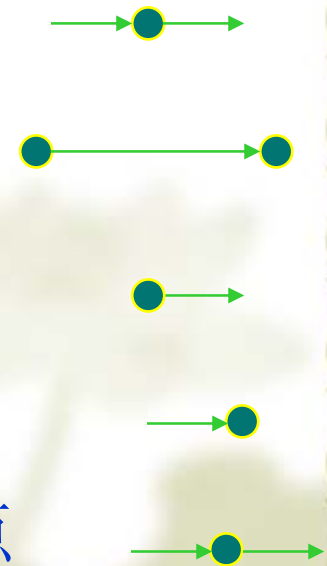
支路-----两节点间的线段

输入节点-----只有输出支路的节点

输出节点-----只有输入支路的节点

混合节点-----既有输出又有输入支路的节点

支路增益-----两节点间的函数关系



信号流图术语:

通路-----沿支路形成的路径



开通路-----与任一节点相交不多与一次

闭通路-----起始节点与终止节点为同一节点，且与其它节点相遇不多于一次。

回路-----闭通路

回路增益-----回路中各支路的传输的乘积

不接触回路--没有公共节点的回路

前向通路-----从输入至输出的开通路

2.5.2.3 梅森增益公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_a L_b L_c + \dots$$

式中:

Δ -----信号流图的特征式

n -----从输入节点到输出节点的前向通路数

p_k -----从输入节点到输出节点第k条前向通路的增益

$\sum L_a$ ----所有不同回路的增益之和

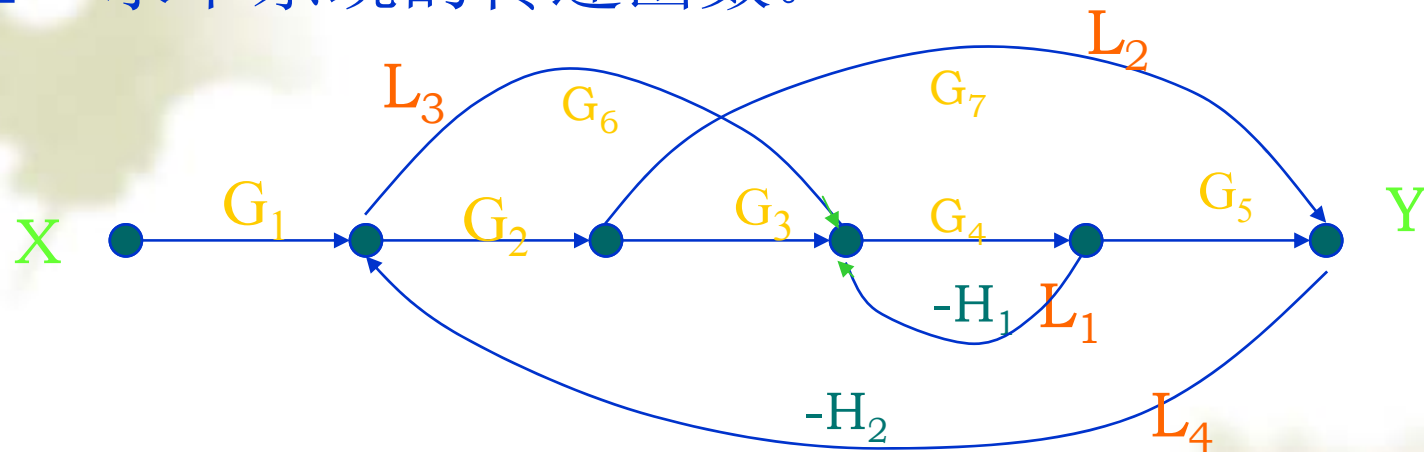
$\sum L_b L_c$ ----每两个互不接触回路增益乘积之和

$\sum L_a L_b L_c$ -----每三个互不接触回路增益乘积之和

※ Δ_k -----第k条前向通路的余子式（即在 Δ 公式中与第K条前向通路接触的代入零）

2.5.2. 应用举例

例 2 求下系统的传递函数。



解:(1)有三条前向通路 $P_1=G_1G_2G_3G_4G_5$

$$P_2=G_1G_4G_5G_6$$

$$P_3=G_1G_2G_7$$

(2)有四个回路

$$L_1= - G_4H_1$$

$$L_2= - G_2G_7H_2$$

$$L_3= - G_6G_4G_5H_2$$

$$L_4= - G_2G_3G_4G_5H_2$$

2.5.2. 应用举例

(3) L_1 和 L_2 互不接触 $L_1L_2=G_2G_4G_7H_1H_2$

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+L_1L_2$$

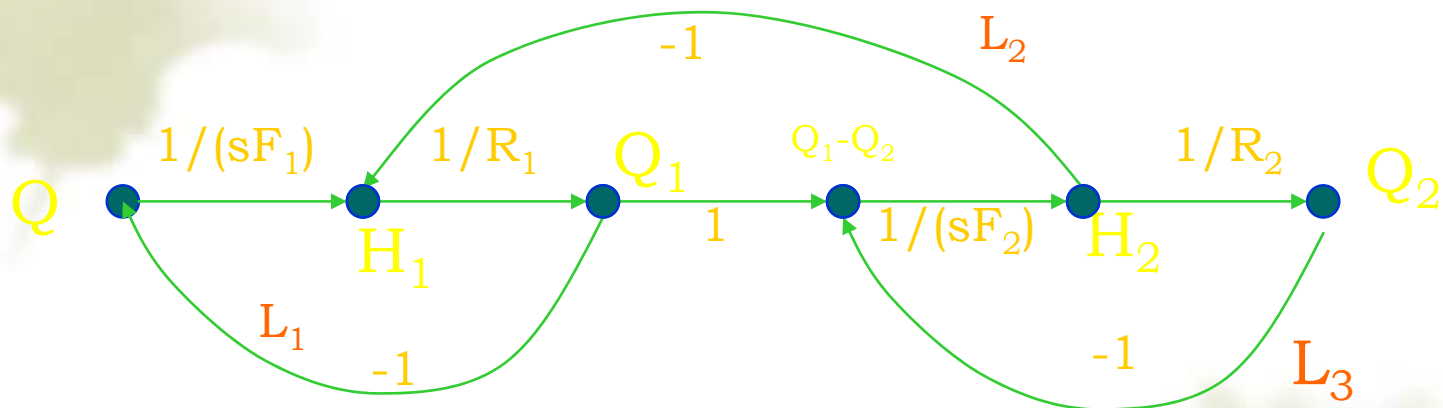
$$=1+G_4H_1+G_2G_7H_2+G_4G_5G_6H_2+G_2G_3G_4G_5H_2 \\ +G_2G_4G_7H_1H_2$$

(4) P_1 和 P_2 与 L_1, L_2, L_3, L_4 都接触 P_3 与 L_1 不接触

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 & \Delta_2 &= 1 & \Delta_3 &= 1 - L_1 = 1 + G_4H_1 \\ \frac{Y(s)}{X(s)} &= \mathbf{P} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} \\ &= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_4G_5G_6 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{\Delta} \end{aligned}$$

2.5.2. 应用举例

例 1 已知双容水箱的信号流图，求系统传递函数。



解:

(1) 有一条前向通路

$$P_1 = \frac{1}{R_1 R_2 F_1 F_2 s^2}$$

(2) 有三个回路

$$L_1 = -\frac{1}{R_1 F_1 s} \quad L_2 = -\frac{1}{R_1 F_2 s} \quad L_3 = -\frac{1}{R_2 F_2 s}$$

2.5.2. 应用举例

(3) L_1 和 L_3 互不接触

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$$

(4) p_1 与 L_1, L_2, L_3 都接触，所以 $\Delta_1 = 1$

$$P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$$= \frac{1}{R_1 R_2 F_1 F_2 s^2 + (R_1 F_1 + R_1 F_2 + R_2 F_2) s + 1}$$

第六节 实验建模方法

2.6.1 概述

阶跃响应图解法

最小二乘辨识

$$Y = X\theta + e$$

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

相关分析法

$$G(j\omega) = \frac{S_{xy}(j\omega)}{S_x(j\omega)}$$

2.6.2 阶跃响应图解法

2.6.2.1 有自平衡型

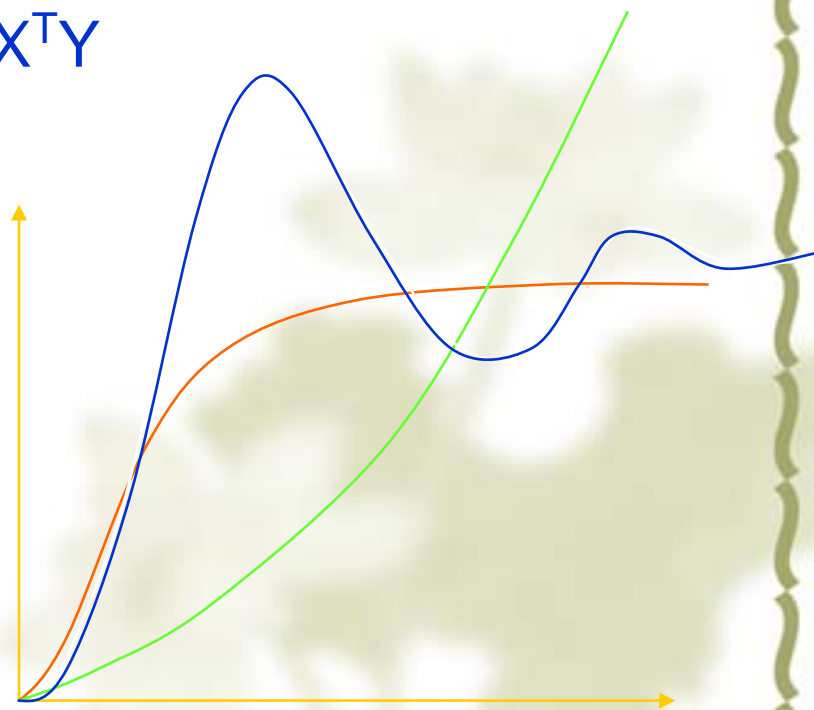
—

2.6.2.2 无自平衡型

—

2.6.2.3 衰减振荡型

—



2.6.2 阶跃响应图解法 (1)

✧ 2.6.2.1 有自平衡型

✧ 1) 含有迟延函数的过程传递函数模型

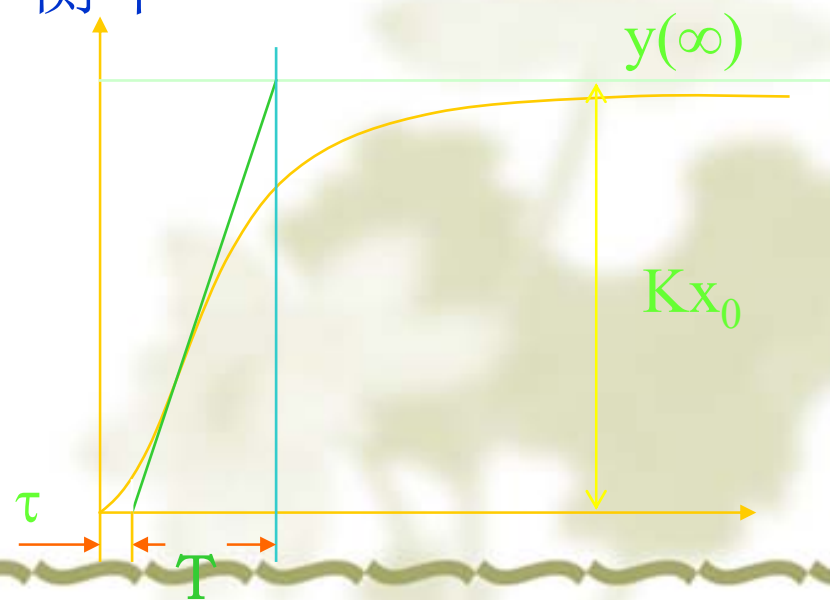
$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1} = \frac{\frac{1}{\rho} \cdot e^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

$$K = \frac{1}{\rho} \quad K: \text{增益}; \quad \rho: \text{自平衡率}$$

T : 惯性; τ : 迟延时间

$$K = \frac{y(\infty)}{x_0}$$

$$\rho = \frac{x_0}{y(\infty)}$$



2.6.2 阶跃响应图解法 (2)

2.6.2.1 有自平衡型

2) 不含迟延函数的过程传递函数模型

(1) 切线法

当 n 为整数时
$$G(s) = \frac{K}{(T_0 s + 1)^n} \quad K = \frac{y(\infty)}{x_0}$$

据 τ / T 查表2-1,得 n 和 T/T_0 。

当 n 不为整数时

$$n = n_1 + \alpha$$

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_0 s)^{n_1} (1 + \alpha T_0 s)}$$

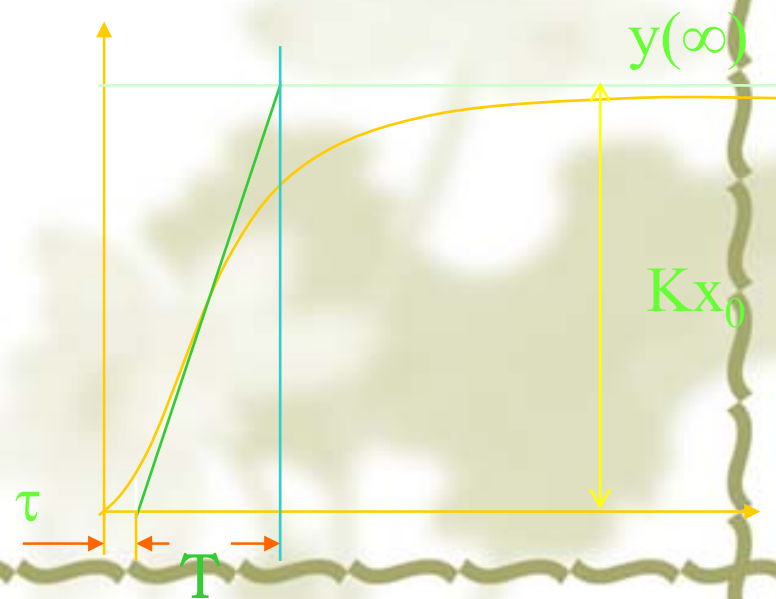


表2-1

 $G_0(s) = \frac{K}{(1+T_0s)^n}$ 中的 n T_0 值与响应曲线上 τ T_0 值的关系

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{\tau}{T_c}$	0	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493
$\frac{\tau}{T_0}$	0	0.282	0.805	1.43	2.10	2.81
$\frac{T_c}{T_0}$	1	2.718	3.695	4.46	5.12	5.7
n	7	8	9	10	14	25
$\frac{\tau}{T_c}$	0.570	0.642	0.710	0.773	1.0	1.5
$\frac{\tau}{T_0}$	3.56	4.31	5.08	5.86	9.12	18.5
$\frac{T_c}{T_0}$	6.22	6.71	7.16	7.6	9.10	12.32

例2-11 用试验方法测得锅炉主汽温在喷水量阶跃扰动时的响应曲线为有自平衡型阶跃响应曲线。已知喷水量的阶跃幅值为 $x_0 = \frac{2T}{h}$ 。从阶跃响应曲线上量得 $y(\infty) = 18^\circ\text{C}$ ， $\tau = 63\text{s}$ ， $T_c = 153\text{s}$ 。试求此汽温对象以喷水量为输入信号，主汽温为输出信号的近似传递函数 $G_0(s)$ 。

解 设近似传递函数的形式为：

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{K}{(1+T_0s)^n}$$

传递函数中的负号表示喷水量增加时，主汽温下降。

$$(1) \quad K = \frac{y(\infty)}{x_0} = \frac{18}{2} = 9^{\circ} \text{C}/\text{T}/h$$

$$(2) \quad \frac{\tau}{T_c} = \frac{63}{153} = 0.412$$

查表2-1, 可得 $n \approx 5$, $\frac{T_c}{T_0} = 5.12$

故可得
$$T_0 = \frac{T_c}{5.12} = \frac{153}{5.12} \approx 30s$$

因此对象的近似传递函数为

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{9}{(1+30s)^5} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{T}/h}$$

2.6.2 阶跃响应图解法 (3)

✧ 2.6.2.1 有自平衡型

✧ 2) 不含迟延函数的过程传递函数模型

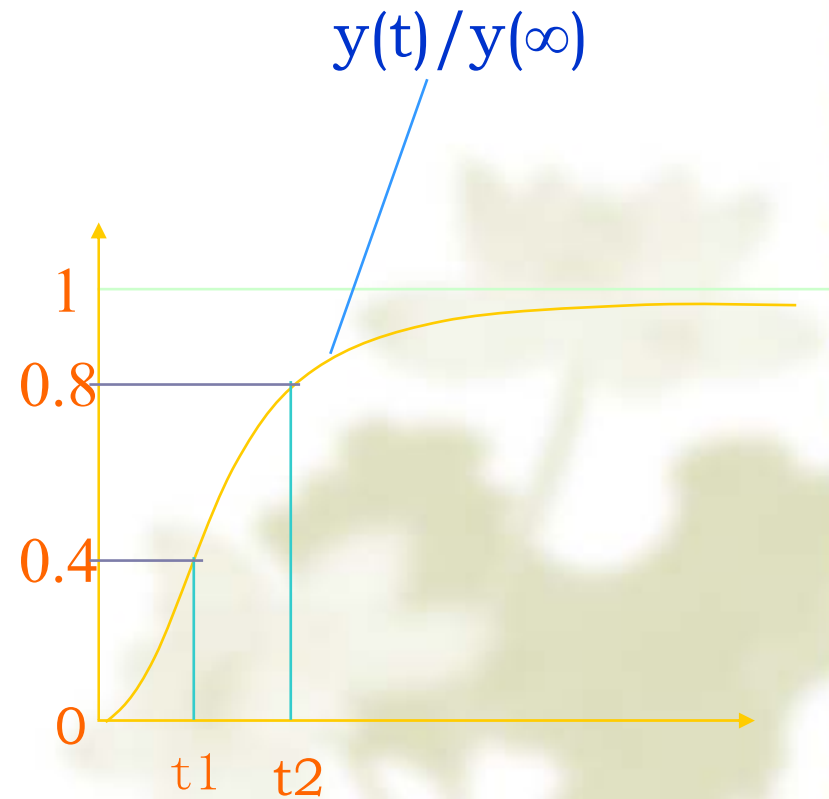
✧ (2) 两点法 $K = \frac{y(\infty)}{x_0}$

☆ $0.32 < \frac{t_1}{t_2} < 0.46$

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1 + t_2}{2.16}$$

$$\frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} = \frac{1.74 t_1}{t_2} - 0.55$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



2.6.2 阶跃响应图解法 (4)

$$\textcircled{\text{⌚}} \quad \frac{t_1}{t_2} \leq 0.32$$

$$T = \frac{t_1 + t_2}{2.12} \quad G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

$$\textcircled{\text{⌚}} \quad \frac{t_1}{t_2} = 0.46$$

$$T = \frac{t_1 + t_2}{4.36} \quad G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2}$$

$$\textcircled{\text{⌚}} \quad \frac{t_1}{t_2} > 0.46$$

$$nT_0 = \frac{t_1 + t_2}{2.16}$$

由 t_1/t_2 查表2-2得 n

进而得

$$T_0 = \frac{t_1 + t_2}{2.16n}$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_n s + 1)^n}$$

表2-2

$$\frac{t_1}{t_2} = f(n)$$

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{t_1}{t_2}$	0.32	0.46	0.53	0.58	0.62	0.65
n	7	8	9	10	12	14
$\frac{t_1}{t_2}$	0.67	0.685	0.70	0.71	0.735	0.75

2.6.2 阶跃响应图解法（5）

✧ 2.6.2.2 无自平衡型

✧ 1) 含迟延函数的过程传递函数模型

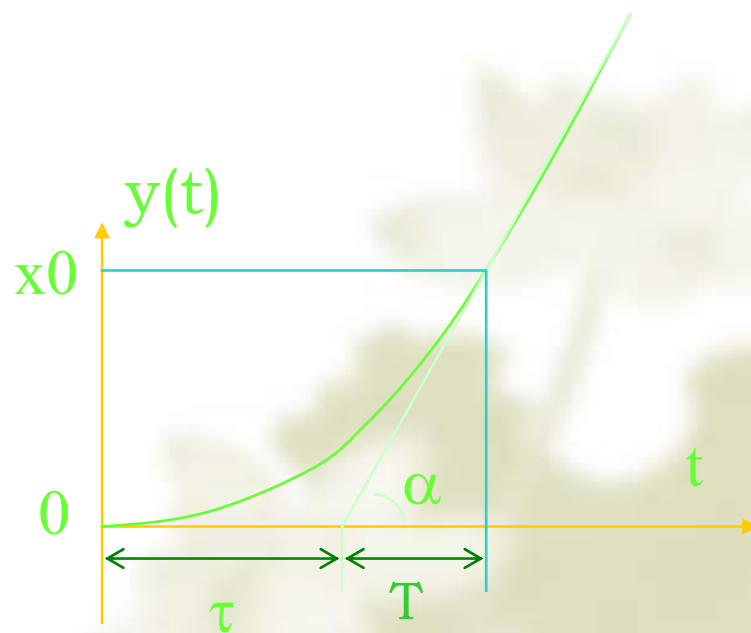
$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts} = \frac{\varepsilon}{s} \cdot e^{-\tau s}$$

$\varepsilon=1/T$ 飞升速度

τ ----- 迟延时间;

T ----- 积分时间.

$$T = \frac{x_0}{tg \alpha}$$



2.6.2 阶跃响应图解法 (6)

✧ 2.6.2.2 无自平衡型

✧ 2) 不含迟延函数的过程传递函数模型

$$G(s) = \frac{1}{Ts(1+T_0s)^n}$$

$$T = \frac{x_0}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{x_0}{\frac{OH}{OD}} = \frac{\tau x_0}{OH} \quad T_0 = \frac{\tau}{n}$$

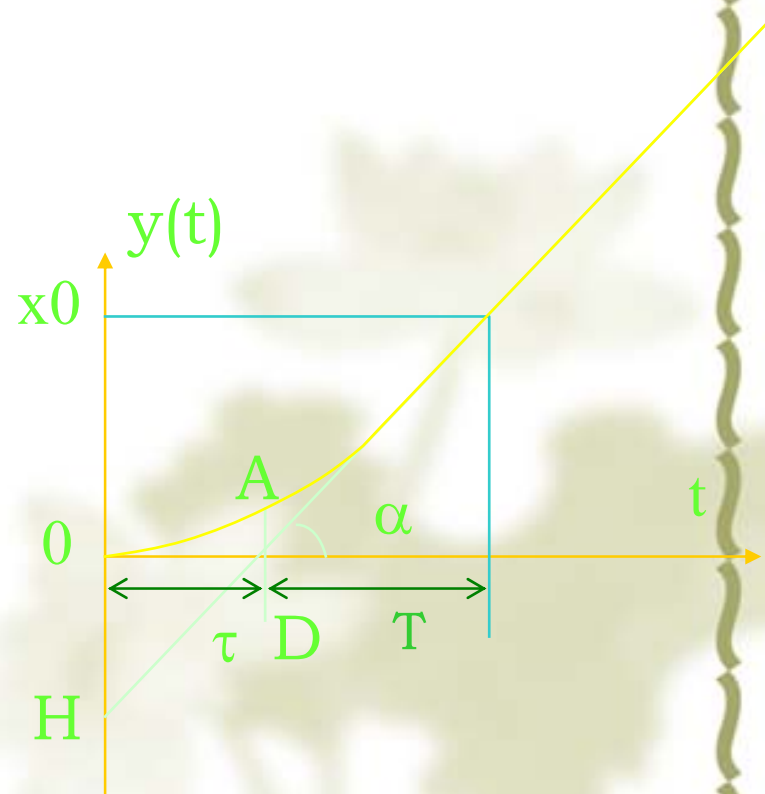
由DA/OH的值查图2-38,
表2-6得n. 若n不为整数,

$$n = n_1 + \beta$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts(1+T_0s)^{n_1}(1+\beta T_0s)}$$

当n>5

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts}$$



2.6.2 阶跃响应图解法 (7)

✧ 2.6.2.3 衰减振荡型

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

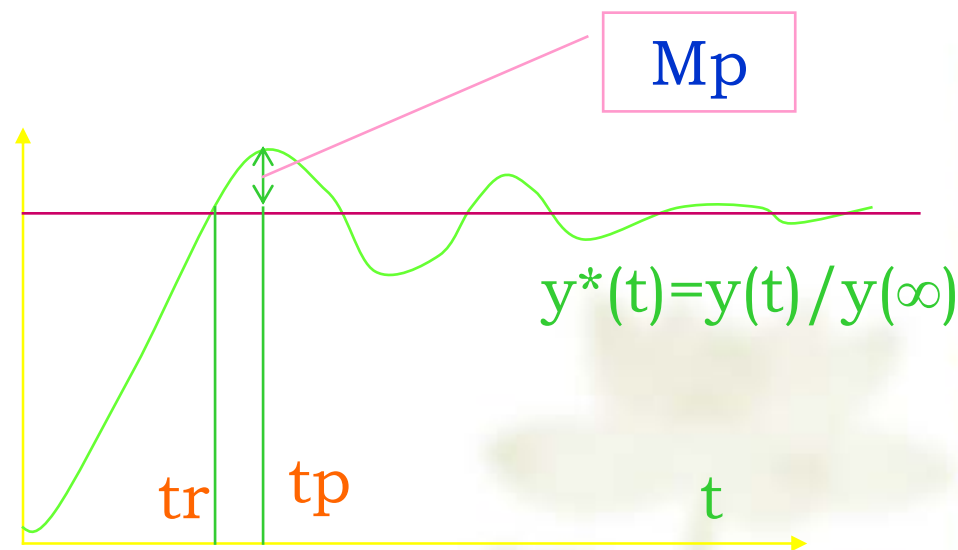
$$K = \frac{y(\infty)}{x_0}$$

$$m = -\ln Mp$$

$$\zeta = \frac{m}{\sqrt{\pi^2 + m^2}}$$

$$T = (t_p - t_r) \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{tg^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}}$$

$$\tau = t_p - \frac{\pi T}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



第七节 PID控制器

2.7.1 PID控制器的动态特性

2.7.1.1 P 控制器

2.7.1.2 PI 控制器

2.7.1.3 PD 控制器

2.7.1.4 PID 控制器

2.7.2 PID控制作用分析

2.7.2.1 P 控制 (Proportion)

2.7.2.2 I 控制 (Integration)

2.7.2.3 D 控制 (Differentiation)

2.7.2.4 几种控制作用的比较

2.7.3 PID控制器的参数整定

2.7.4 PID控制器的实现

2.7.1 PID控制器的动态特性

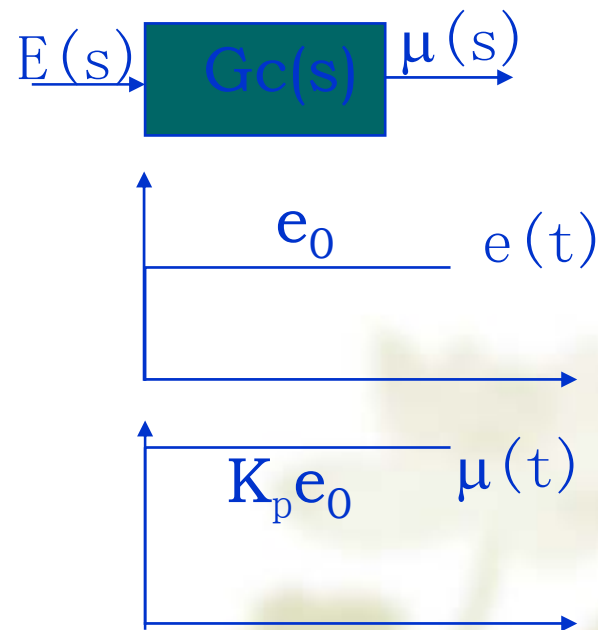
✿ 2.7.1.1 P 控制器

$$\mu(t) = K_p e(t) = \frac{1}{\delta} e(t)$$

K_p : 比例增益; δ : 比例带

$$G_c(s) = \frac{\mu(s)}{E(s)} = K_p = \frac{1}{\delta}$$

$$\mu(t) = K_p e_0$$



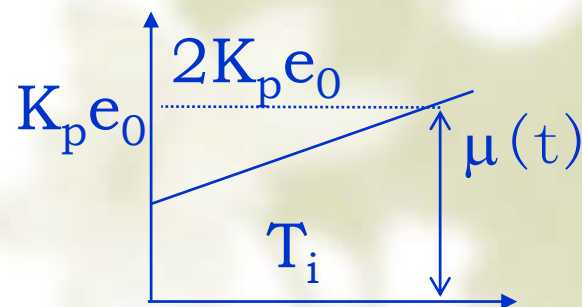
✿ 2.7.1.2 PI 控制器

$$\mu(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right]$$

T_i : 积分时间

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$$\mu(t) = K_p \left(e_0 + \frac{te_0}{T_i} \right)$$



2.7.1 PID控制器的动态特性

♣ 2.7.1.3

$$\mu(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (\text{理想})$$

T_d : 微分时间

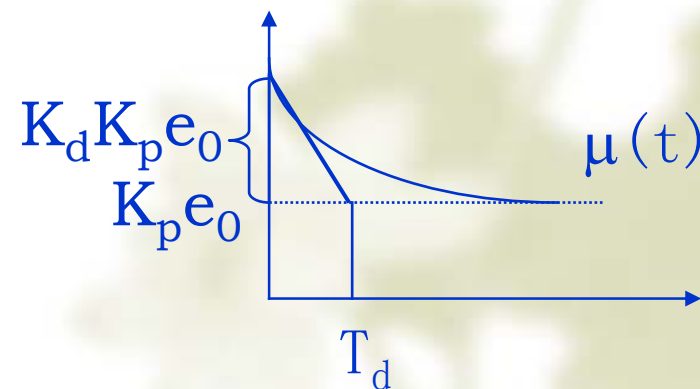
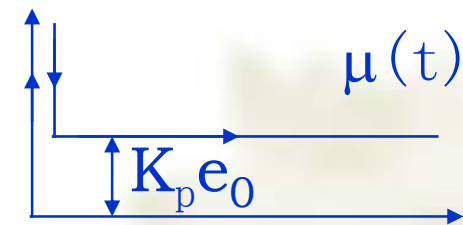
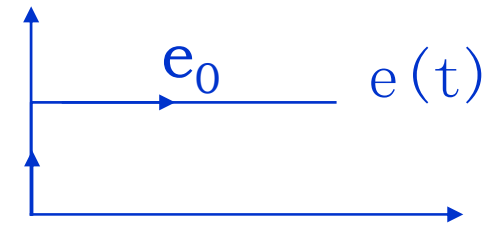
$$G_c(s) = \frac{\mu(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

$$\mu(t) = K_p [e_0 + T_d e_0 \delta(t)]$$

实际PD控制器

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d T_d s}{1 + T_d s} \right)$$

$$\mu(t) = K_p \left(e_0 + K_d e_0 e^{-\frac{t}{T_d}} \right)$$



2.7.1 PID控制器的动态特性

♣ 2.7.1.4 PID 控制器

$$\mu(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$\mu(t) = K_p \left(e_0 + \frac{te_0}{T_i} + T_d e_0 \delta(t) \right)$$

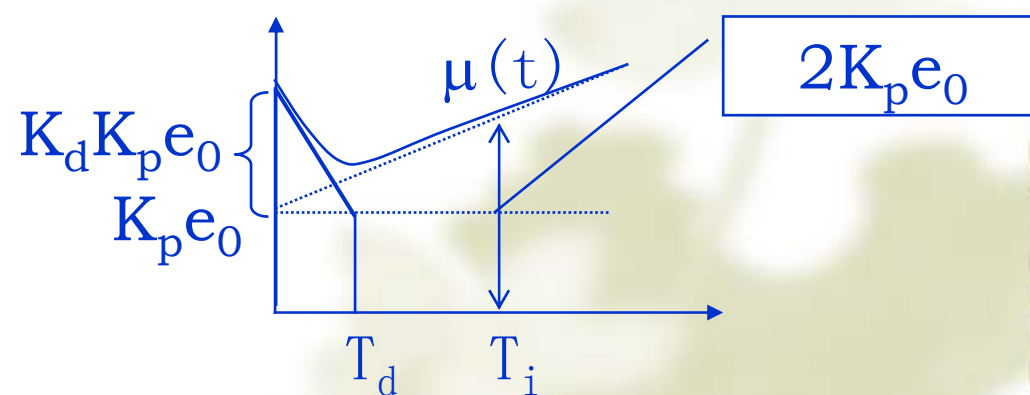
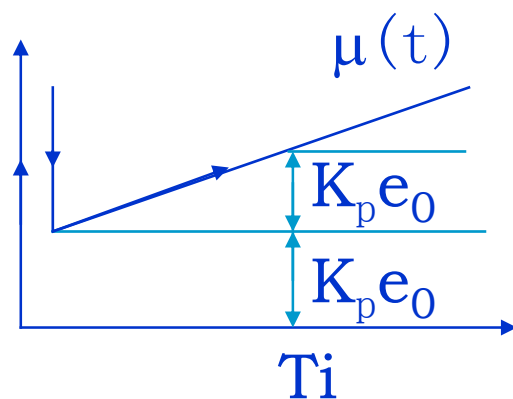
实际PID控制器

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{K_d T_d s}{1 + T_d s} \right)$$

2.7.1 PID控制器的动态特性

2.7.1.4 PID 控制器(续)

$$\mu(t) = K_p \left(e_0 + \frac{te_0}{T_i} + K_d e_0 e^{-\frac{t}{T_d}} \right)$$



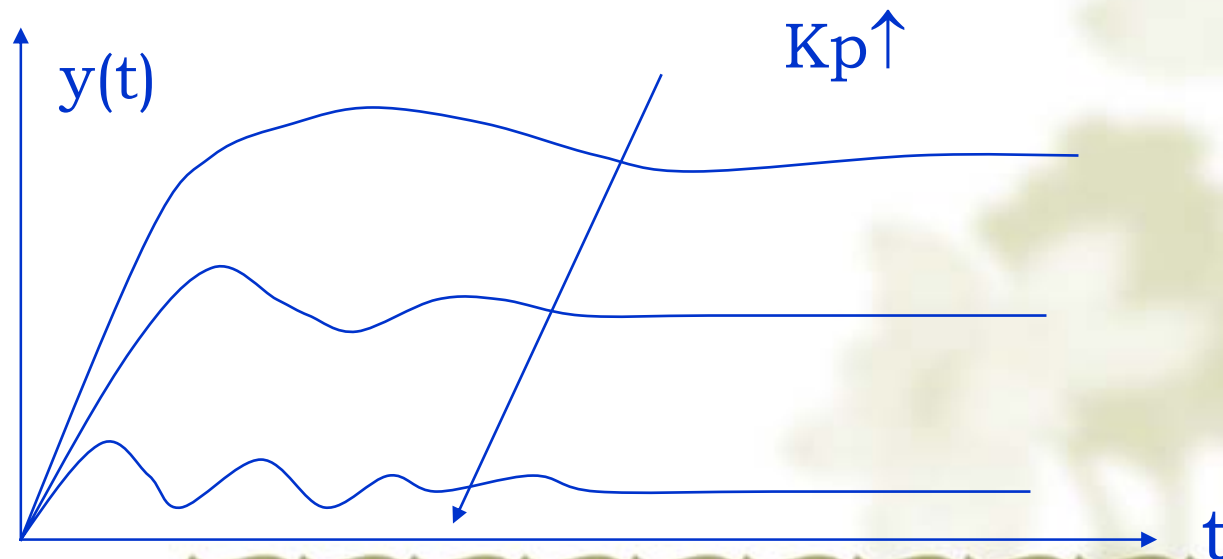
2.7.2 PID控制作用分析

♣ 2.7.2.1 P 控制 (Proportion)

♣ $\mu(t) = K_p e(t) = (1/\delta) e(t)$

♣ P 控制作用是最基本的负反馈控制作用。

♣ 当 K_p 越大，即 δ 越小，将使比例控制作用增强，系统稳态误差变小，控制周期缩短，抗干扰能力减弱，系统稳定性变差。



2.7.2 PID控制作用分析

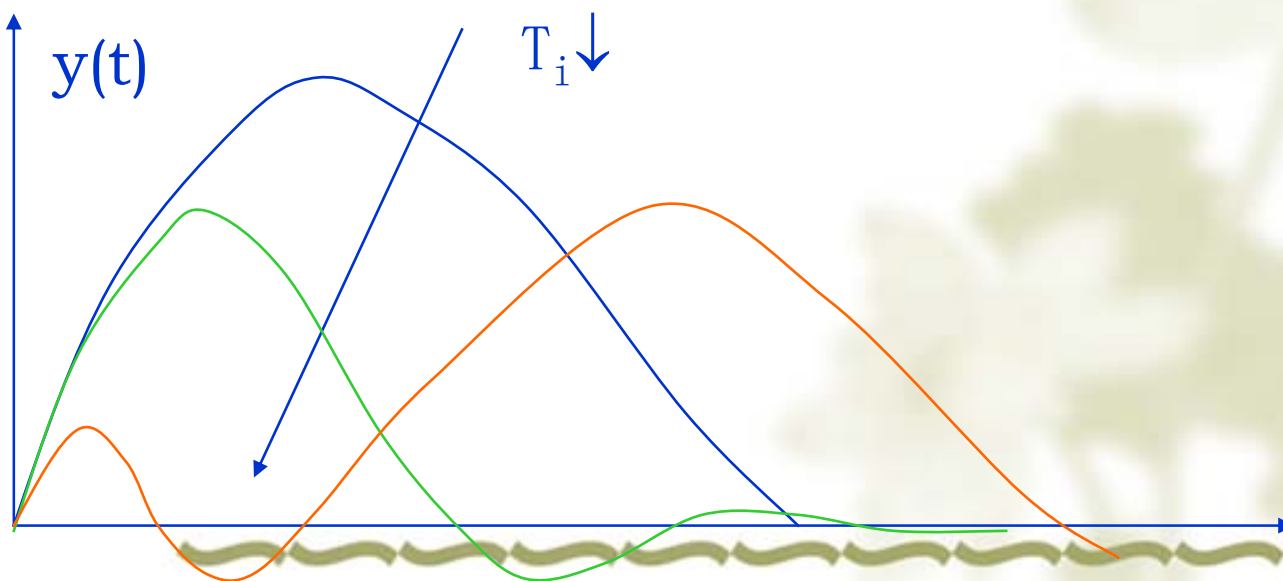
2.7.2.2 I 控制 (Integration)

$$\mu(t) = (1/T_i) \int e(t) dt$$

I控制作用最主要的用途是消除稳态偏差。

偏差不为零积分不停止, T_i 越大, 积分越慢。无差系统必有积分环节, 或在控制器中或在被控过程中。

I作用将使误差趋于零, 但使系统稳定性变差。易振荡。

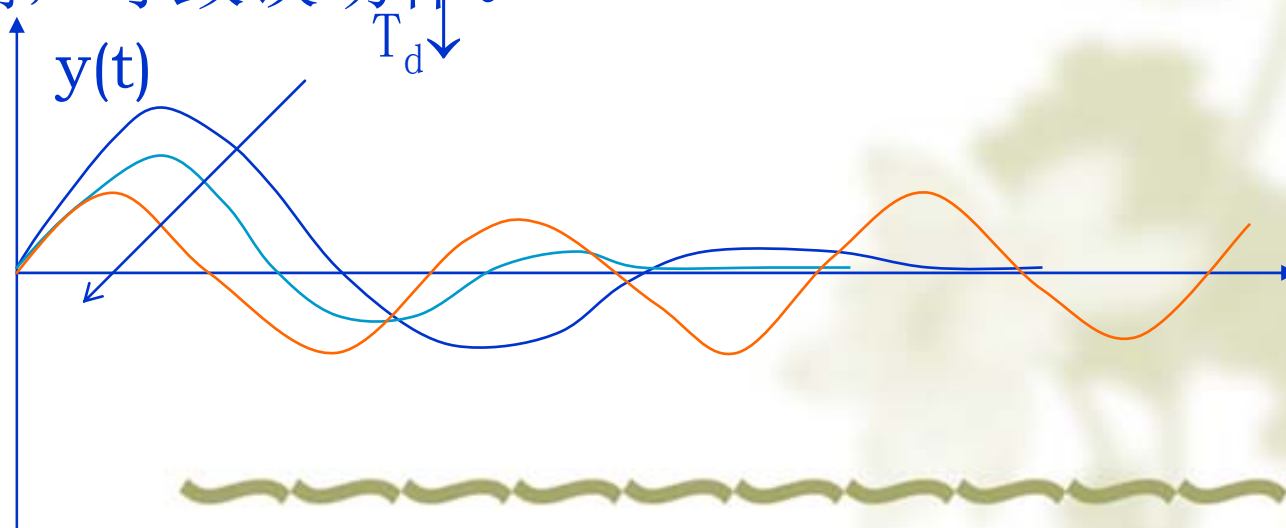


2.7.2 PID控制作用分析

♣ 2.7.2.3 D 控制 (Differentiation)

$$\mu(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}$$

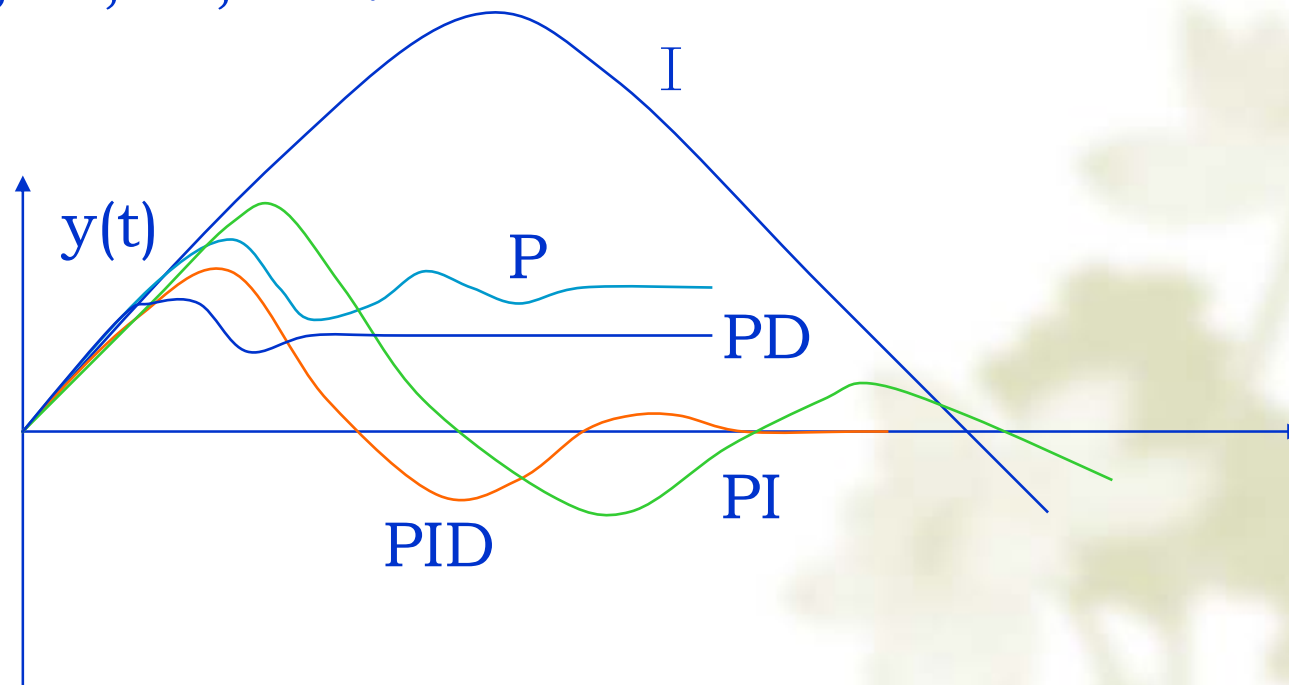
*D 控制作用最主要的用途是抑制动态偏差。*因为与偏差的导数成正比，所以偏差变化越快 D 作用越强，而偏差不变时，D 作用为零。D作用有预测涵义，有利于系统稳定性。但在有噪声情况下，预测变误测，导致误动作。



2.7.2 PID控制作用分析

♣ 2.7.2.4 几种控制作用的比较

- ♣ P 只管当前误差, I 顾及以前的误差, D 看重将来的误差
- ♣ P 为主, I和D为辅. I或D一般不单独使用. 常见的组合有P, PI, PD, PID.



2.7.3 PID控制器的参数整定

♣ 整定——指参数的整理和确定

控制器参数与受控过程特性相匹配才能获得好的效果. 为此控制器投入使用时需要整定

♣ 整定可分人工, 自动, 理论, 实验, 工程, 最优.

♣ 最常用的工程整定法（衰减曲线法）：

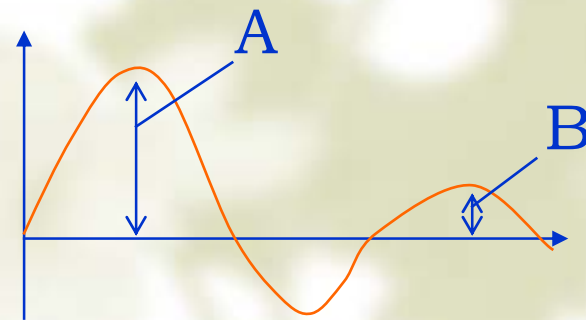
1) 设 T_i 最大, T_d 为零, δ 为大值

2) 逐步进行减小 δ 做阶跃响应试验, 直至出现1/4衰减比振荡

3) 记下此时的 δ_s 和振荡周期 T_s , 按下表确定PID参数.

控制器	δ	T_i	T_d
P	δ_s		
PI	$1.2\delta_s$	$0.5T_s$	
PID	$0.8\delta_s$	$0.3T_s$	$0.1T_s$

$$B/A=1/4$$



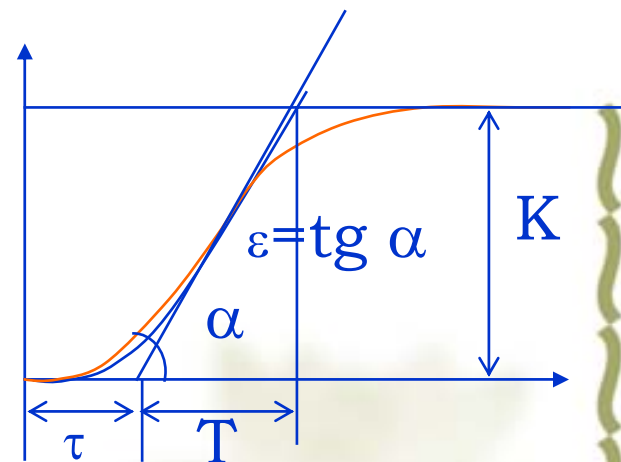
2.7.3 PID控制器的参数整定

✿ 最著名的PID整定法（Ziegler-Nichols 1942）：

已知单位阶跃响应就可查表计算

1) 对于无自平衡对象

控制器	δ	Ti	Td
P	$\varepsilon\tau$		
PI	$1.1\varepsilon\tau$	3.3τ	
PID	$0.85\varepsilon\tau$	2.0τ	0.5τ



2) 对于有自平衡对象

①当 $\tau/T \leq 0.2$

控制器	δ	Ti	Td
P	$K\tau/T$		
PI	$1.1K\tau/T$	3.3τ	
PID	$0.85K\tau/T$	2.0τ	0.5τ

2.7.3 PID控制器的参数整定

2) 对于有自平衡对象

②当 $0.2 < \tau/T \leq 1.5$

控制器	δ	Ti	Td
P	$2.6K(\tau/T - .08) / (\tau/T + .07)$		
PI	$2.6K(\tau/T - .08) / (\tau/T + .06)$	$0.8T$	
PID	$2.6K(\tau/T - .15) / (\tau/T + .88)$	$0.81T + 0.19\tau$	$0.25Ti$

2.7.4 PID控制器的实现

一) 用分立电子元件

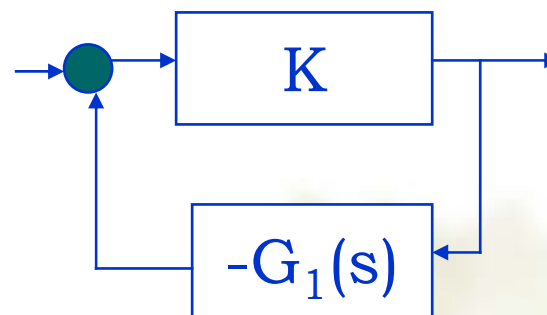
利用高增益反馈原理来实现

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K}{1 + KG_1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{K} + G_1(s)} \approx \frac{1}{G_1(s)} \end{aligned}$$

若使 $G_c(s) = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$

则令 $G_1(s) \approx \frac{1}{G_c(s)} = \frac{\delta T_i s}{1 + T_i s}$

例 电动型调节器 (DDZ-II-DTL311)



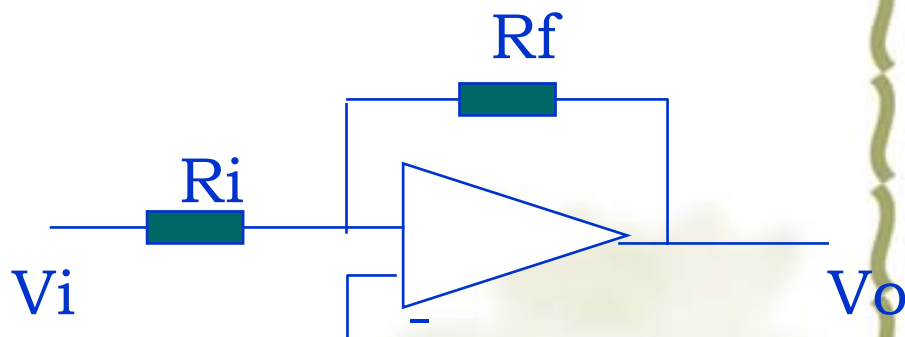
2.7.4 PID控制器的实现

二) 用运算放大器

运放具有宽线性, 高增益, 高阻抗特性, 可直接用来进行线性运算.

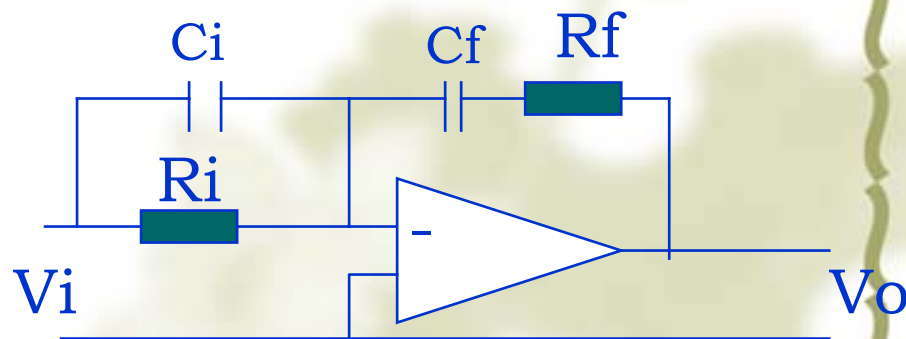
例 P 控制器

$$G(s) = \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_i} = K_p$$



例 PID 控制器

$$G(s) = \frac{(R_f C_f s + 1)(R_i C_i s + 1)}{R_i C_f s}$$



2.7.4 PID控制器的实现

三) 用微处理器

微处理器可实现复杂的数学运算。通过编程很容易实现PID规律运算。在含有微处理器的控制器中一般已设计有PID模块或子程序。任一PID控制器的实现只不过是调用相应的模块或子程序而已。

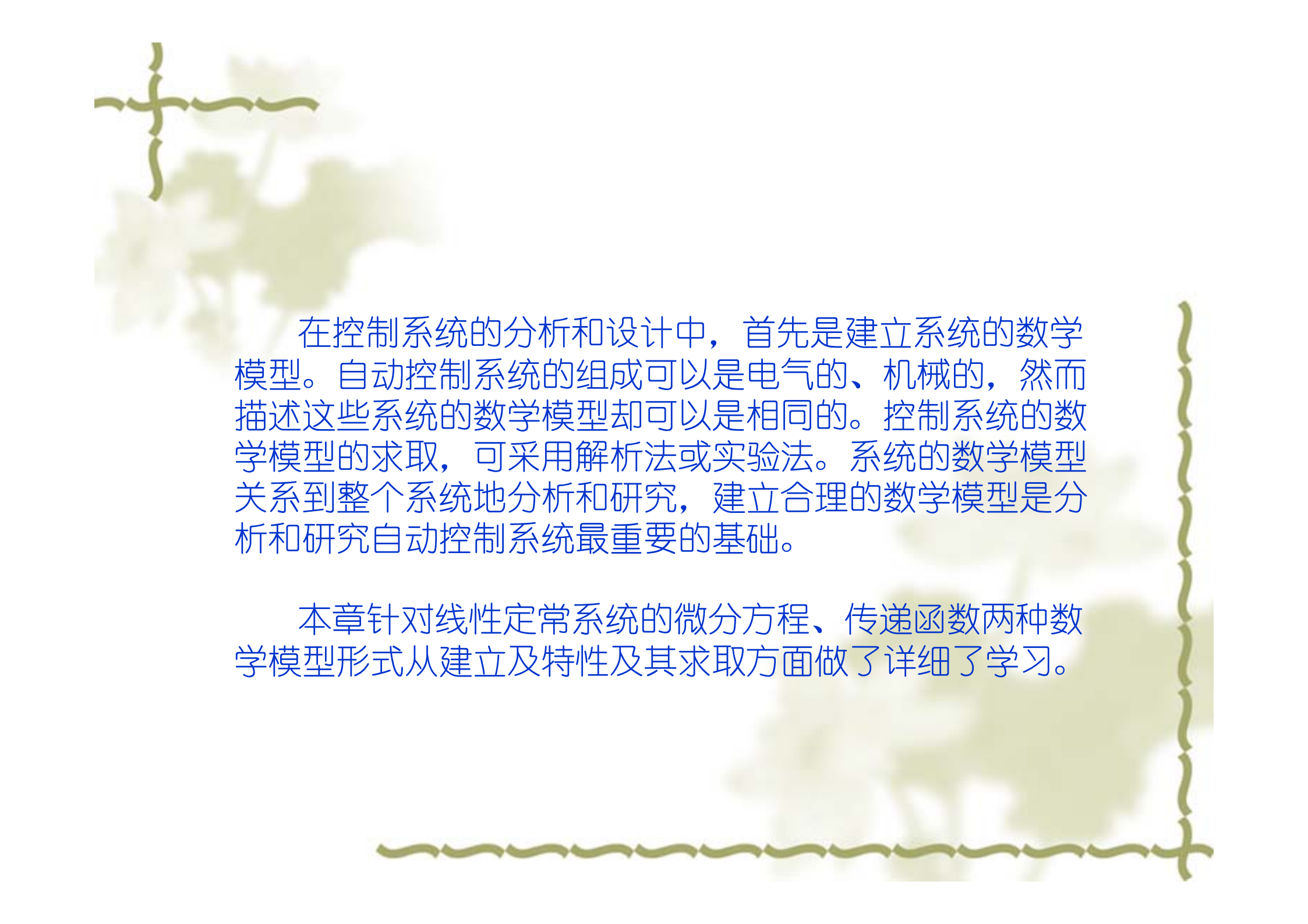
例 Basic 程序中的 Gosub 1000

Fotran 程序中的Call PID (*, *, *)

或通过专用控制器的系统组态方式调用PID 模块

组态方式： 填表式，画图式，编程式

小 结



在控制系统的分析和设计中，首先是建立系统的数学模型。自动控制系统的组成可以是电气的、机械的，然而描述这些系统的数学模型却可以是相同的。控制系统的数学模型的求取，可采用解析法或实验法。系统的数学模型关系到整个系统地分析和研究，建立合理的数学模型是分析和研究自动控制系统最重要的基础。

本章针对线性定常系统的微分方程、传递函数两种数学模型形式从建立及特性及其求取方面做了详细了学习。

一、线性定常控制系统的数学模型

1 微分方程

用解析法建立系统的微分方程的步骤：

- 1) 确定系统的输入、输出变量；
- 2) 根据系统的物理、化学等机理，依据列出各元件的输入、输出运动规律的动态方程；
- 3) 消去中间变量，写出输入、输出变量的关系的微分方程。

一、线性定常控制系统的数学模型

2 传递函数

1) 定义：传递函数是在零初始条件下，系统（或环节）输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

2) 性质

A 传递函数是线性系统在复频域里的数学模型；

B 传递函数只与系统本身的结构与参数有关，与输入量的大小和性质无关；

C 传递函数与微分方程有相通性，两者可以相互转换。

3) 表达式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m < n)$$

传递函数也可以写成零极点形式，即

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (m < n)$$

式中： $-z_i$ ——分子多项式的根，又称为系统的零点；

$-p_i$ ——分母多项式的根，又称为系统的极点；

4) 典型环节的传递函数

一个自动控制系统，可以认为由一些典型环节（一些元件和部件）所组成。常见的典型环节及其传递函数有以下几种：

A 比例环节： $G(s) = K$

B 积分环节： $G(s) = \frac{1}{Ts}$

C 微分环节：理想

$$y(t) = T_d \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

实际微分 $T_d \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_d T_d \cdot \frac{dx(t)}{dt}$

D 惯性环节： $G(s) = \frac{K}{T_c s + 1}$

E 二阶振荡环节： $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2}$

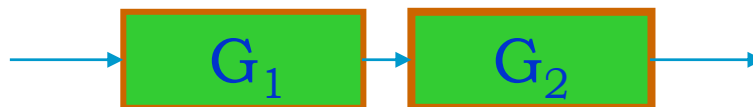
F 延迟环节： $G(s) = e^{-\tau s}$

二、线性控制系统的框图

1 结构图（又称为方框图）

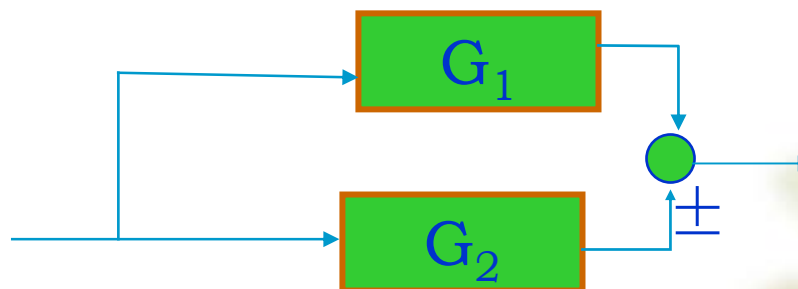
1) 方框图的基本连接方式及其简化

串联



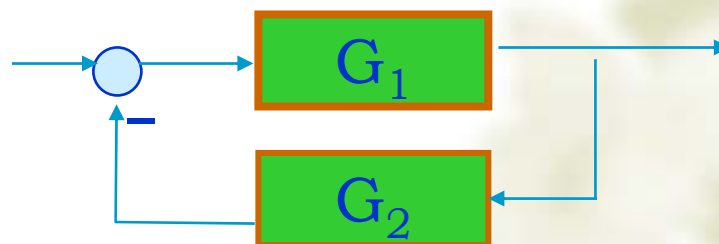
$$G_1 G_2$$

并联



$$G_1 \pm G_2$$

反馈



$$\frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

2) 方框图的等效变换：相邻点移位，保证等效性



2 信号流图

1) 相关概念

信号流图是一种表达线性代数方程组结构的信号传递网络，由节点和支路组成。

信号流图中的有关术语：源节点、目标节点、混合节点、前向通路、回路、不接触回路。

2) 梅森公式

应用梅森公式可以不经任何结构变化，一步写出系统的总的传递函数，所以是一个十分有用的公式。

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$
$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_a L_b L_c + \dots$$

Δ -----信号流图的特征式

n -----从输入节点到输出节点的前向通路数

P_k -----从输入节点到输出节点第 k 条前向通路的增益

$\sum L_a$ -----所有不同回路的增益之和

$\sum L_b L_c$ -----每两个互不接触回路增益乘积之和

$\sum L_a L_b L_c$ -----每三个互不接触回路增益乘积之和

Δ_k -----第 k 条前向通路的余子式（即在 Δ 公式中与第 K 条前向通路接触的代入零）

